單元 10: 導函數
(課本 §2.6)

一. 切線斜率與變化率

設 $P(x, f(x))$ 為函數 $y = f(x)$ 的圖形上的一固定點.

問. 如何求 f 圖形上過點 P 的切線?

答. 設 Q 為 f 圖形上異於 P 之點, 即 Q 可表為

$$Q(x+h, f(x+h))$$

其中 h 為某非零的實數, 如圖示. 過 P 與 Q 的直線稱作割線 (secant line), 斜率為

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

令 $Q \to P$, 即 $h \to 0$, 得

$$\text{割線} \longrightarrow \text{過 } f \text{ 圖形上點 } P \text{ 的一線}$$

稱作過 f 圖形上點 P 的切線 (tangent line) 且對應的割線斜率

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \longrightarrow \text{一數}$$

稱作過 f 圖形上點 P 的切線斜率, 故得

定義 1 (切線斜率). 過 f 圖形上點 $P(x, f(x))$ 的切線斜率爲

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

當極限存在時.

接著, 探討 "過 f 圖形上點 $P(x, f(x))$ 的切線斜率" 與 "f 在 x 的變化率 (rate of change)" 間的等價關係.

因爲量差 (difference)

$$f(x+h) - f(x)$$

表示在 x 的 h 改變 (change h in x, 由 x 至 $x+h$, 記作 $\Delta x = (x+h) - h = h$) 所對應的 y 改變 (change in y, 記作 $\Delta y = f(x+h) - f(x)$), 故量差商 (difference quotient)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表示在區間 $[x, x+h]$ 上 y 對 (應) 於 x 的平均變化率 (average rate of y with respect to x), 剛好

就是 f 圖形上過 $P(x, f(x))$ 與 $Q(x+h, f(x+h))$ 的割線斜率.

取 $h \longrightarrow 0$ 時, 量差商的極限, 即計算

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

得 f 在 x 的變化率 (rate of change of f at x), 又稱作瞬間變化率 (instantaneous rate of change of f at x), 剛好就是過 f 圖形上點 $P(x, f(x))$ 的切線斜率.

註 1. 量差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

表示 f 在區間 $[x, x+h]$ 上的平均變化率或, 幾何上, 過 f 圖形上兩點 $(x, f(x))$ 與 $(x+h, f(x+h))$ 的割線斜率.

註 2. 量差商的極限, 即

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

表示 f 在 x 的瞬間變化率或, 幾何上, 過 f 圖形上點 $(x, f(x))$ 的切線斜率.

二. 導函數

量差商的極限又稱作 f 在 x 的導函數 (derivative, 衍生物), 如下定義.

定義 2 (函數的導函數). 函數 f 對 x 的導函數爲一函數 f' (讀作 "f prime"), 定義爲

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f' 的定義域爲極限存在的所有 x 形成的集合.

註 1. 函數 f 的導函數表示 f 在 x 的瞬間變化率或, 幾何上, 過 f 圖形上點 $(x, f(x))$ 的切線斜率.

註 2. 一些函數 $y = f(x)$ 的導函數慣用法爲

1. $D_x f(x)$ 讀作 "d sub x of f of x"
2. $\dfrac{dy}{dx}$ 讀作 "dy dx"
3. y' 讀作 "y prime"

註 3. 計算 f 的導函數的四步驟:

1. 計算 $f(x+h)$
2. 形成量差 $f(x+h)-f(x)$
3. 形成量差商 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. 計算量差商的極限, 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

例 1. 設函數

$$f(x)=x^2-4x$$

試回答下列各項.

(a) 試求 $f'(x)$.

(b) 試求過 f 圖形上點 $(1,-3)$ 的切線.

(c) 試求 f 圖形上有水平切線的切點.

(d) 函數 f 在水平切線切點的變化率爲何?

例 2. 試求下列各函數的導函數以及函數圖形上過給定點的切線.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\neq 1$; 點 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

(b) $g(x)=\sqrt{x-1}$, $x\geq 0$; 點 $(2,1)$

註. 導函數 g' 的定義域爲 $(0,\infty)$ 不等於函數 g 的定義域 $[0,\infty)$, 即 $g'(1)$ 不存在. 此例說明, 導函數的定義域不一定就是原函數的定義域, 而是量差商極限存在的 x 所形成的集合.

三. 可微性與連續性

函數 f 在 $x=a$ 的導函數

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

存在, 則稱 f 在 $x=a$ 可微 (differentiable); 否則稱作不可微.

若函數 f 在 $x=a$ 連續, 但

(1) f 的圖形在 $(a,f(a))$ 有一方向上的急速改變, 如圖示, 會造成在 $x=a$ 不可微, 並稱此點爲一 “轉角” (corner), 即函數 f 在圖形上的轉角處不可微.

(2) f 在 $(a,f(a))$ 有一鉛垂切線, 如圖示, 此處切線斜率, 即導函數, 未定義, 故亦不可微.

故連續性不一定保證可微性. 但可微性一定保證連續性, 即

定理 (可微性與連續性). 若函數 f 在 $x=a$ 可微, 則 f 在 $x=a$ 連續.

註 1. 與上述定理等價的敘述爲 “若函數 f 在 $x=a$ 不連續, 則 f 在 $x=a$ 不可微” .

註 2. 此等價敘述爲, 除了上述的轉角與鉛垂切線外, 另一判斷不可微的準則.

例 3. 設某百貨公司的時薪爲, 前 8 小時, 每小時 $8; 超時爲, 每小時 $12.

(a) 試求工作 x 小時的時薪 $f(x)$.

(b) 函數 f 在 $x=8$ 可微嗎?

例 4. 設函數 f 如圖示. 試說明 f 在 $x=a$, b, c, d, e, f, g 不可微的理由.

例 5. 設函數

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

試以導函數的定義證明 f 在 $x=0$ 不可微.

例 6. 設 $f(x)=|x|$. 試以導函數的定義證明

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

例 7. 設

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$$

試求 a 與 b 使得 f 在 $x=1$ 是連續且可微的.