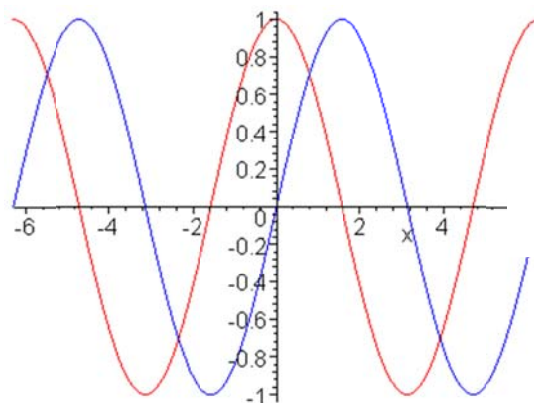


T-5 疊合函數

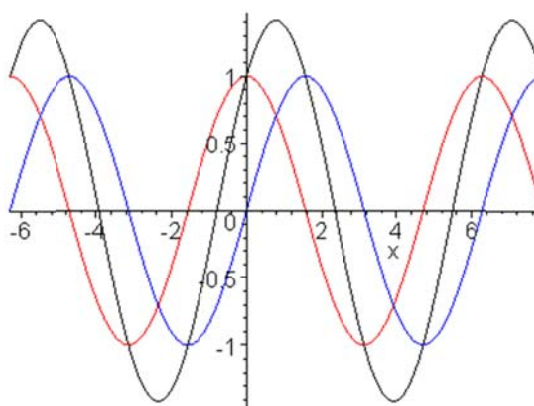
1. 圖形的疊合

【例】 $y = f(x) = \sin x + \cos x$



DSX

將 $y = \sin x$ 的圖形與 $y = \cos x$ 的圖形疊合：



由上圖我們可發現， $y = f(x) = \sin x + \cos x$ 的圖形與 $y = \sin x$ 的圖形很相似，都是以 2π 為週期的波狀圖形，只是振幅不同，且波峰與波谷的位置不同。

2. 當 r 、 θ 為常數且 $r > 0$ 時，函數 $y = r \sin(x + \theta)$ 只是將 $y = \sin x$ 的圖形上下伸縮 r 倍，再左右移動 $|\theta|$ 單位（ $\theta < 0$ 為右移， $\theta > 0$ 為左移）。猜測 $y = \sin x + \cos x$ 的圖形為 $y = \sin x$ 的圖形，上下伸縮，左右平移而得。

這樣的猜測是否合理呢？我們可以藉由一些三角函數計算上的技巧驗證看看。

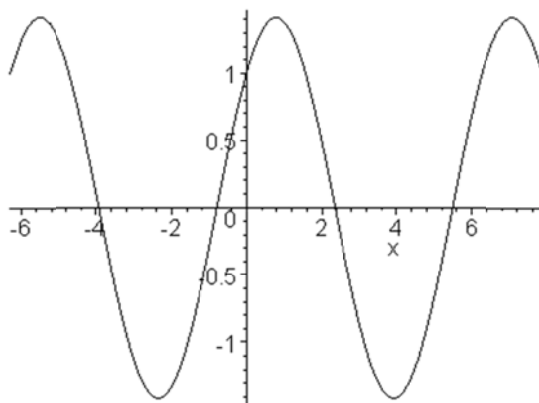
《驗證過程》 $y = \sin x + \cos x$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

因此，函數 $y = f(x) = \sin x + \cos x$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形上下伸縮 $\sqrt{2}$ 倍，

再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位而得。

將 $y = \sin x + \cos x$ 與 $y = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 的圖形描繪在同一坐標平面可得：



3. 一般而言，當 a 、 b 不全為 0 時，函數 $y = a \cos x + b \sin x$ 的圖形都是 $y = r \sin(x + \theta)$ 的形式。

因此，函數 $y = a \cos x + b \sin x$ 的圖形都是以 2π 為週期的波，且當 x 為實數時，

函數 $y = a \cos x + b \sin x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，最小值為 $-\sqrt{a^2 + b^2}$ 。

【說明】

4. 當 a 、 b 不全為 0 時，函數 $y = a \cos x + b \sin x$ 的圖形亦可表示為 $y = r \cos(x + \phi)$ 的形式。

【說明】

【例】 試將 $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ 化為單一的三角函數。