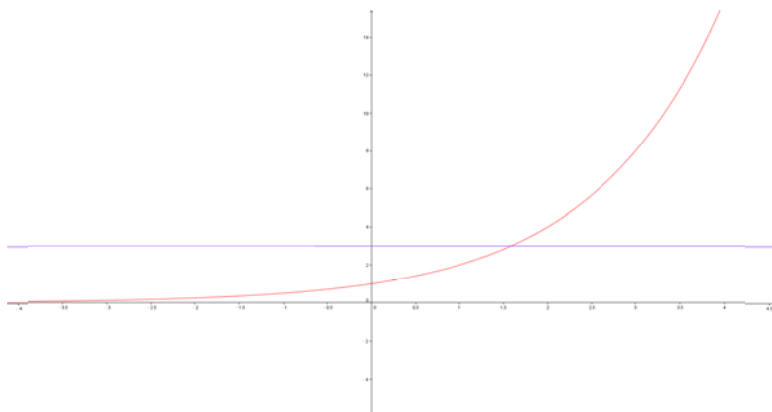


E-3 對數與對數函數

主題一 對數的意義

1. 對數的意義：考慮以 2 為底的指數函數 $y=2^x$ 的圖形，並作水平線 $y=3$ ，設兩者交於點 A 。



點 A 的 y 坐標為 3，點 A 的 x 坐標，滿足 $3=2^x$ 。

這樣的 x 是唯一存在的，我們稱為「以 2 為底，3 的對數」，記做 $\log_2 3$ 。

2. 對數的定義：當 b 是一個正實數， a 是一個不等於 1 的正實數，且實數 x 滿足 $a^x=b$ ，這樣的實數 x 是唯一存在的， x 稱為「以 a 為底， b 的對數」，記做 $\log_a b$ ，其中 a 稱為底數， b 稱為真數，而對數 $\log_a b$ 的值可以為任意實數。

$$\text{即：} a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

3. 底數與真數的限制： $\log_a b$ 的底數 a 必須是不等於 1 的正實數，而且真數 b 必須大於 0。

《說明》因為對於任意正實數 x ， $1^x=1$ ，所以 a 必須是不等於 1 的正實數，而且真數 b 必須大於 0，方程式 $a^x=b$ 才保證有唯一實根 x ，對數式 $\log_a b$ 才有意義。

例： $\log_3(-5)$ ， $\log_1 3$ ， $\log_{-2} 4$ ， $\log_5 0$ 都沒有意義。

主題二 對數的運算法則

設以下性質中，底數皆為「不等於 1 的正實數」，真數皆為正實數，指數可為任意實數：

$$(1) \log_a a^x = x;$$

$$(2) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1;$$

$$(3) \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$

$$(4) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$(5) \log_a x^r = r \log_a x;$$

$$(6) \log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b, \text{ 其中 } r \neq 0.$$

【例】 試化簡下列各式：(1) $\ln \sqrt{e}$ ；(2) $\ln 5e$ ；(3) $\ln \frac{1}{e}$ 。

【例】 試化簡下列各式：(1) $\ln 2 + \ln(4x-1) = \ln(2x+5)$ ；(2) $e^x = 3^{x-4}$ 。

主題三 對數函數及其圖形

1. 對數函數的定義：設 a 是異於 1 的正數，對於任意正實數 x ， $\log_a x$ 都有意義，

我們稱 $f(x) = \log_a x, x > 0$ 為以 a 為底數的對數函數。

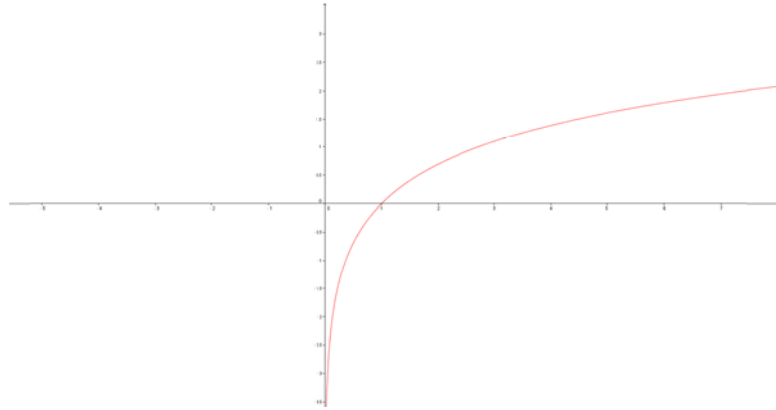
【例】 $f(x) = \log_2 x, x > 0$ 稱為以 2 為底的對數函數；

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, x > 0$ 稱為以 $\frac{1}{2}$ 為底的對數函數。

2. 對數函數的圖形：

(1) 底數大於 1 的對數函數圖形：

【例】在坐標平面上，描繪對數函數 $y = \ln x$ 的圖形。



【例】在坐標平面上，描繪對數函數 $y = \log_2 x$ 的圖形。

圖形性質 底數 a 大於 1 時，對數函數 $g(x) = \log_a x$

- (i) 圖形完全在 y 軸右方。（因為真數 x 恆正）；
- (ii) 圖形由左而右上升，即底數 a 大於 1 時，對數函數 $g(x) = \log_a x$ 是遞增的；
- (iii) 恆過定點 $(1, 0)$ ；
- (iv) 底數 a 愈大，圖形上升的速度愈慢（愈平緩）；
- (v) 當 x 趨近於 0 時，圖形趨近於 y 軸；
- (vi) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$ ； $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$ 。

(2) $0 < \text{底數 } a < 1$ 的對數函數圖形：

【例】在坐標平面上，描繪對數函數 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。

圖形性質 $0 < \text{底數 } a < 1$ 時, 對數函數 $g(x) = \log_a x$

- (i) 圖形完全在 y 軸右方。(因為真數 x 恆正) ;
- (ii) 圖形由左而右下降, 即 $0 < \text{底數 } a < 1$ 時, 對數函數 $g(x) = \log_a x$ 是遞減的 ;
- (iii) 恆過定點 $(1, 0)$;
- (iv) 底數 a 愈小, 圖形下降的速度愈慢 (愈平緩) ;
- (v) 當 x 趨近於 0 時, 圖形趨近於 y 軸 ;
- (vi) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$; $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$ 。

(3) 函數 $y = \log_a x$ 與函數 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸, 即底數互為倒數的兩個對數函數, 其圖形對稱於 x 軸。

(4) 對數函數 $y = \log_a x$ 與指數函數 $y = a^x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。

