E-1 指數與指數函數

主題一 整數指數的意義

1. 正整數指數定義：若 a 為實數，對於任意正整數 n，a^n 表示 a 自乘 n 次的乘積，

 即：$a^n=a\cdot a\cdot\cdots\cdot a$，$a^n$ 讀作 a 的 n 次方，其中 a 稱為底數，n 稱為指數，a^n 稱為指數式。

2. 指數是正整數的指數律：設 a、b 為實數，m、n 是任意正整數，則

 (1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；(3) $(ab)^n=a^nb^n$。

 (4) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；(5) $(\dfrac{b}{a})^n=\dfrac{b^n}{a^n}$。

3.零指數的定義：設 a 是異於零的實數，定義 $a^0=1$。《註》0^0 無意義。

4.負整數指數的定義：設 $a\neq 0$，$n\in N$，定義 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，即 a^{-n} 為 a^n 的倒數。

【例】$a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$，$a^{-5}=\dfrac{1}{a^5}$。

5.指數為整數時仍滿足指數律：設 a、b 為異於零的實數，m、n 是任意整數，則

 (1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；(3) $(ab)^n=a^nb^n$；

 (4) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；(5) $(\dfrac{b}{a})^n=\dfrac{b^n}{a^n}$。

主題二 有理數指數的意義

1. $a^{\frac{1}{n}}$ 的定義：當 a 是一個正實數，且 n 是一個正整數時，定義 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

《說明》若分數指數 $a^{\frac{1}{n}}$ 滿足指數律，則 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a$，

所以，$a^{\frac{1}{n}}$ 是方程式 $x^n=a$ 的一個正實根。

又，我們知道：當 $a>0$ 時，對任意正整數 n 都有唯一的正 n 次方根，

即存在唯一的正數 b，使 $b^n=a$，此數以 $\sqrt[n]{a}$ 表之，

因此，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

2.分數指數的定義：設 $a>0$，n 為自然數，m 為整數，規定 $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$。

《說明》若 n 為自然數，m 為整數，則 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\mathrm{m}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$。

又 $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m=a^m$，

所以，$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ 是 a^m 的正 n 次方根，即 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$。

因此，$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$。

《註》分數的指數式 $a^{\frac{m}{n}}$（n 為自然數，m 為整數）只有在 $a>0$ 的條件下才有意義。

3.指數為分數的指數式（底數大於 0），指數律仍然成立。

主題三 實數指數的意義

1. 定義：設 $a>0$，r 是任一個無理數，設數列 $\{r_n\}$：r_1，r_2，…，r_n，…是一個以 r 為極限的有理數列，則定義 a^r 為數列 $\{a^{r_n}\}$：a^{r_1}，a^{r_2}，…，a^{r_n}，…的極限值。

【例】考慮 $2^{\sqrt{3}}$：

設 $\{t_n\}$ 是一個以 $\sqrt{3}$ 的近似值所構成的有理數列：

$\{t_n\}$：0，1.7，1.73，1.732，1.73205，…

則所對應的數列 $\{2^{t_n}\}$：1，3.250，3.317，3.321，3.3217，…

因為數列 $\{2^{t_n}\}$ 每一項均有定義，不但遞增且 $2^{t_n}<2^2=4$，

因此，當 t_n 逐漸增加且愈來愈接近 $\sqrt{3}$ 時，

2^{t_n} 也愈來愈大且逐漸趨近某一個正實數，這個正實數，我們記做 $2^{\sqrt{3}}$。

2.指數為實數的指數式(底數大於 0)，指數律仍然成立：

設 $a>0$，$b>0$，r、s 為任意實數，則

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$；(2) $(a^r)^s = a^{rs}$；(3) $(ab)^r = a^r b^r$；

(4) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$；(5) $(\dfrac{b}{a})^r = \dfrac{b^r}{a^r}$。

3.指數式的大小關係：設 $a>0$，r、s 為任意實數，且 $r>s$，則

(1)當 $a>1$ 時，$a^r > a^s$；

(2)當 $0<a<1$ 時，$a^r < a^s$。

【例】試解出 $2^{x-3} = 8^{x+1}$ 與 $3^x - 27(\dfrac{1}{3})^x = 0$ 之 x 值。

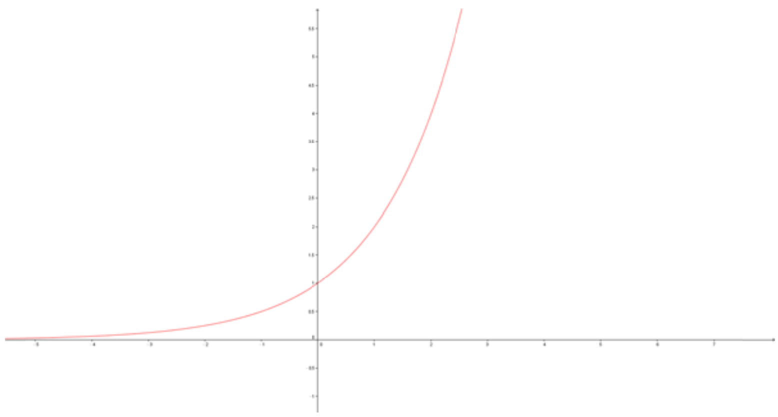
主題四 指數函數及其圖形

1.指數函數的定義：設 a 是一個正實數，則函數 $f(x) = a^x$，$x \in R$ 稱為以 a 為底的指數函數。

2.指數函數的圖形：

(1) 底數 $a>1$ 的指數函數圖形：

【例】描繪函數 $f(x) = 2^x$，$x \in R$ 的圖形。



$\boxed{\text{圖形性質}}$ 底數 a 大於 1 時，指數函數 $g(x)=a^x$

a. 位置在 x 軸上方（即函數值恆正）；

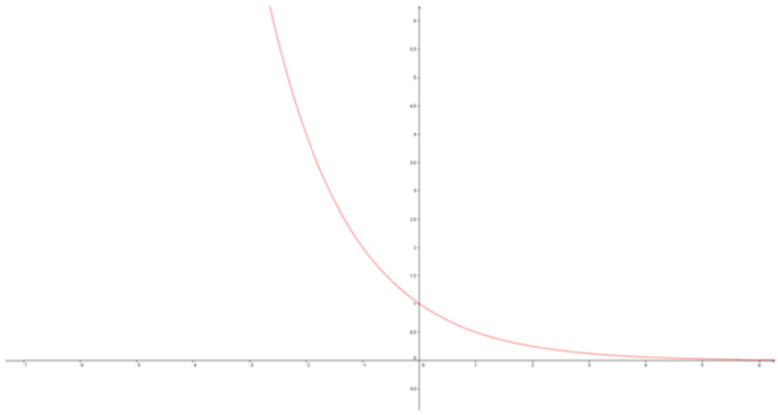
b. 圖形是由左而右遞增的；

c. 恆過點(0，1)；

d .圖形是連續的。

(2) 底數 $a<1$ 的指數函數圖形：

【例】描繪函數 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$，$x\in R$ 的圖形。



$\boxed{\text{圖形性質}}$ $0<$底數 $a<1$ 時，指數函數 $g(x)=a^x$

a. 位置在 x 軸上方（即函數值恆正）；

b. 圖形是由左而右遞減的；

c. 恆過點(0，1)；

d. 圖形是連續的。

3.指數函數圖形的性質：設 $y=a^x$，$x\in R$

(1) 函數圖形均在 x 軸上方（即函數值恆正），且恆過點(0，1)。

(2) 當 $a>1$ 時，圖形由左而右上升，且底數 a 的值愈大，其上升的速度愈快；當 $0<a<1$ 時，圖形由左而右下降，且底數 a 的值愈小，其下降的速度愈快。

(3) 當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 的圖形與負向的 x 軸逐漸接近；當 $a<1$ 時，$y=a^x$ 的圖形與正向的 x 軸逐漸接近；我們稱 x 軸是 $y=a^x$ 圖形的漸近線。

(4) $y=a^x$ 與 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的圖形，對稱於 y 軸。

4.常用的指數微積分公式（e 的定義請見 E-2 節）：

(1) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ ；

(2) $\int e^x = e^x + C$ ，其中 C 是積分常數。