6-6 部份分式的概念

我們對於兩個分式相加的運算都很熟悉，譬如說 $\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x+1}$，只要利用分母通分的技巧，我們就可以輕易地計算出 $\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)+(x+5)}{(x+5)(x+1)}=\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}$。但同學能不能一看到 $\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}$ 就知道如何拆成不同的項相加呢？這是本節我們想要讓同學們學習的重點。

往後在微積分的課程裡，同學們可能會遇到類似像 $\int\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}dx$ 這樣的運算。事實上，想要直接利用積分公式計算 $\int\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}dx$ 確實有很大的難度！為了解決這類的積分問題，我們會利用 $\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x+1}$ 的結果，試著把 $\int\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}dx$ 拆成 $\int\frac{2}{x+5}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$。然後，針對 $\int\frac{2}{x+5}dx$ 與 $\int\frac{1}{x+1}dx$，我們就可以利用學過的積分公式把它們的積分結果分別計算出來再相加，就可以算出 $\int\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}dx$。

在這個例子當中，$\frac{2}{x+5}$ 與 $\frac{1}{x+1}$ 就稱為 $\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)}$ 的部份分式（partial fractions）。常見的拆法有 Case 1 與 Case 2 兩種：

Case 1

設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 皆為多項式，且 $q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$，其中所有的 a_ix+b_i（$i=1,2,\ldots,n$）皆相異，$\deg p(x)<\deg q(x)$，

則 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 可被唯一分解為 $\frac{c_1}{a_1x+b_1}+\frac{c_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_nx+b_n}$，其中 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 為常數。

【例】 $\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}=\frac{3}{x-2}+\frac{-1}{x+1}$。

Case 2

設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 皆為多項式，且 $q(x)=(ax+b)^n$ ， $n\in N$ ， $\deg p(x)<\deg q(x)$ ，

則 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 可被唯一分解為 $\dfrac{c_1}{ax+b}+\dfrac{c_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{c_n}{(ax+b)^n}$ ，其中 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 為常數。

【例】 $\dfrac{2x+1}{(x-1)^3}=\dfrac{0}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-1)^3}$ 。

【例】 $\dfrac{6x-1}{x^3(2x-1)}=\dfrac{-8}{x}+\dfrac{-4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{16}{2x-1}$ 。

例題計算

【例】若 $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}$ ，試求出 A 值與 B 值。

【例】若 $\dfrac{4x^2-x+1}{(x-1)(x+3)(x+6)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{x-6}$ ，試求出 A 值、 B 值與 C 值。

影片裡我們並未強調 $\deg p(x) < \deg q(x)$ ，但， $\deg p(x) < \deg q(x)$ 一定要視為前提，我們才能把 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 唯一分解成 Case 1 與 Case 2 所提到的結果，請同學們務必留意。然而，如果同學在解題時遇到 $\deg p(x) \ge \deg q(x)$ 的例子，譬如 $\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+5x+2}$ 、 $\dfrac{x^5}{x^2-1}$ 或 $\dfrac{x^4+3x}{x^2+2x+1}$ ，我們可以先利用長除法以分子除以分母，把 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 化成「 $\dfrac{\text{被除式 } p(x)}{\text{除式 } q(x)} = \text{商式} + \dfrac{\text{餘式 } r(x)}{\text{除式 } q(x)}$ 」的形式，由於 $\deg r(x) < \deg q(x)$ 必成立，所以可用 Case 1、Case 2 提到的方式將 $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ 唯一分解成部份分式的形態。

【例】 $\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+5x+2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{13}{2}x}{2x^2+5x+2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{13}{2}x}{(2x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{13}{3}\cdot\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{13}{6}\cdot\dfrac{1}{2x+1}$ 。

【例】 $\dfrac{x^5}{x^2-1} = x^3+x^2+\dfrac{x}{x^2-1} = x^3+x^2+\dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = x^3+x^2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}$ 。

【例】 $\dfrac{x^4+3x}{x^2+2x+1} = x^2-2x+3+\dfrac{-x-3}{x^2+2x+1} = x^2-2x+3+\dfrac{-x-3}{(x+1)^2} = x^2-2x+3-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$ 。

以下我們補充另外兩種 Case 與例題，雖然在影片中未做介紹，但同學們可以根據講義的內容自行閱讀與練習。

Case 3

設 $p(x)$ 、 $q(x)$ 皆為多項式， $q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)$ ，其中所有的 $a_ix^2+b_ix+c_i$（ $i=1,2,\ldots,n$ ）皆相異且不可因式分解，$\deg p(x) < \deg q(x)$ ，則 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 可被唯一分解為 $\dfrac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \dfrac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \cdots + \dfrac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$ ，其中 $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ 為常數。

【例】 $\dfrac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \dfrac{x+1}{x^2+1} + \dfrac{x+3}{x^2+2x+3}$ 。

Case 4

設 $p(x)$、$q(x)$ 皆為多項式，且 $q(x)=(ax^2+bx+c)^n$，$n\in N$，ax^2+bx+c 不可因式分解，

$\deg p(x)<\deg q(x)$，則 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 可被唯一分解為 $\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\dfrac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$，

其中 $A_1,A_2,\ldots,A_n,B_1,B_2,\ldots,B_n$ 為常數。

【例】$\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{1}{x^2+4}+\dfrac{-4}{(x^2+4)^2}$。

【例】$\dfrac{x^2+3x+5}{(x-5)(x+2)^2(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}+\dfrac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$。