

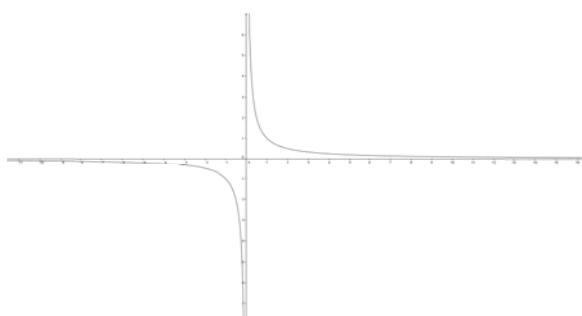
## 6-5 有理函數與漸近線

### 主題一 有理函數的定義

1. 定義：若  $p(x)$ 、 $q(x)$  皆為多項式，且  $p(x) \neq 0$ ，則我們稱函數  $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$  為一個有理函數

(rational functions)。例如， $f(x) = \frac{1}{x}$ 、 $g(x) = \frac{x-7}{(x-1)(x+3)}$ 。

2. 觀察  $y = f(x) = \frac{1}{x}$  的圖形，



(1) 當  $x$  趨近於無窮大或  $x$  趨近於負無窮大的時候， $y$  也會跟著趨近於  $x$  軸。 $f(x) = \frac{1}{x}$  的圖形會無限地靠近  $x$  軸但不會跟  $x$  軸相交，此時我們稱  $x$  軸為水平漸近線。

(2) 當  $x$  趨近於  $0^+$  時， $y$  會趨近於無窮大；當  $x$  趨近於  $0^-$  時， $y$  會趨近於負無窮大。 $f(x) = \frac{1}{x}$  的圖形會無限地靠近  $y$  軸但不會跟  $y$  軸相交，我們稱  $y$  軸為鉛垂漸近線。

### 主題二 鉛垂漸近線(垂直漸近線)

1. 定義：

若函數  $f(x)$  具有下列六種情形至少一者，

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

則  $x = a$  稱為  $f(x)$  函數圖形的鉛垂漸近線 (Vertical asymptote)，或者稱為垂直漸近線。

【例】若  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ，試求  $f(x)$  函數圖形的鉛垂漸近線。

【例】若  $g(x) = \frac{4x+1}{2x-3}$ ，試求  $g(x)$  函數圖形的鉛垂漸近線。

- 2.並非所有的函數圖形都會有鉛垂漸近線。通常，我們想猜測看看某函數圖形是否有鉛垂漸近線，就會從這個函數本身的分母來觀察，檢查有沒有使得函數的分母趨近到 0 的  $x$  值。
- 3.多項函數  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  顯然沒有鉛垂漸近線。

### 主題三 水平漸近線

#### 1. 定義：

若函數  $f(x)$  滿足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ ，則  $y = c$  稱為  $f(x)$  函數圖形的水平漸近線

(Horizontal asymptote)。

【例】若  $f(x) = \frac{2x}{3x^2 + 1}$ ，試求  $f(x)$  函數圖形的水平漸近線。

【例】若  $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ ，試求  $g(x)$  函數圖形的水平漸近線。

《註》同學們亦可順便計算一下上列兩個函數的鉛垂漸近線。

- 2.並非所有的函數圖形都會有水平漸近線。通常我們想猜測看看某函數圖形是否有水平漸近線，直接考慮函數在無窮遠處的極限值是否存在就好了。也就是說，我們只需要觀察「函數會不會在  $x$  趨近於無窮大或負無窮大時， $f(x)$  也跟著趨近到某一個高度  $c$ 」，就能判斷函數有沒有水平漸近線。
- 3.多項函數  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  顯然沒有水平漸近線。

### 主題四 斜漸近線

#### 1. 定義：

若函數  $f(x)$  滿足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ ，則  $y = ax + b$  稱為  $f(x)$  函

數圖形的斜漸近線 (Slant asymptote)。

【例】若  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ ，試求  $f(x)$  函數圖形的斜漸近線。

【例】若  $g(x) = \frac{3x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1}$ ，試求  $g(x)$  函數圖形的斜漸近線。

《註》同學們亦可順便計算一下上列兩個函數的鉛垂漸近線與水平漸近線。