6-4 多項式的常用性質

前情提要：國高中學過的多項式概念

1.定義：形如$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的式子，稱為$x$的多項式，常以$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$，⋯

表示。例：$f(x)=x-6$，$g(x)=-x^2+10x$，$h(x)=x^2-10x+24$⋯均是x的多項式。

2.多項式的文字符號x不可在根號內，不可在分母，不可在絕對值內。

（雖然我們先前學多項式時都是採用以上的規則，但若n為非負偶數，因為$|x|^n=x^n$，所以$|x|^n$的寫法不犯規。）

3.係數與常數項：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中$a_n$、$a_{n-1}$、⋯、$a_1$、$a_0$稱為$f(x)$的係數。

a_k是k次項的係數，也稱為x^k的係數，其中a_0又稱為常數項。

4.多項式的次數：考慮多項式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，當$a_n\neq 0$，$a_n$稱為領導係數，

n稱為$f(x)$的次數，記作$\deg f(x)=n$，此時稱$f(x)$為n次多項式。

【例】多項式$2x^4+x^2-5x+7$，次數為4，其領導係數為2，常數項為7。。

【例】5，3，-2，$\sqrt{7}$，$\dfrac{8}{5}$均為零次多項式，而0稱為零多項式。

6.整係數多項式：係數均為整數的多項式，記作Z〔x〕。

有理係數多項式：係數均為有理數的多項式，記作Q〔x〕。

實係數多項式：係數均為實數的多項式，記作R〔x〕。

複係數多項式：係數均為複數的多項式，記作C〔x〕。

在微積分課程裡，我們所討論的多項式，若無特別指明，均指實係數多項式。

7.降冪(次)排列：依x的次方數，由大到小排列。

升冪(次)排列：依x的次方數，由小到大排列。

【例】$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$：降冪(次)排列

$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$：升冪(次)排列

8.多項式的相等：一個多項式，其各次項係數均是唯一確定的，因此二個多項式要相等，必須次數相等且同類項(x 次數相同的項)的係數都相等。

主題一 多項式的常用性質—除法原理（除法法則）

1. 整數的除法原理：若 a、$b\in Z$，可找到唯一的整數 q，r，使得 $a=bq+r$，其中 $0\le r<b$。

2. 除法原理（除法法則）：

(1) 設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式，且 $g(x)\neq 0$，可利用長除法得到多項式 $q(x)$、$r(x)$，

使得 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

滿足以上條件之多項式 $q(x)$，$r(x)$ 是唯一的，其中 $q(x)$ 稱為 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式，

$r(x)$ 稱為 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式。$f(x)$ 稱為被除式，$g(x)$ 稱為除式。

【例】設 $f(x)=3x^3-x^2-2x+6$，$g(x)=x^2+16$，將 $f(x)$ 當做被除式，$g(x)$ 當做除式，則由除法法則可知，$f(x)$ 可寫成 $3x^3-x^2-2x+6=(x^2+16)(3x-1)+(-50x+22)$，其中 $3x-1$ 為商式，$-50x+22$ 為餘式。

(2) 若 $r(x)=0$，則 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$，即 $f(x)$ 為 $g(x)$ 的倍式（或 $g(x)$ 為 $f(x)$ 的因式）。

2.一個多項式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 中的 x，若以一數 β 代入，可以得到一個數值

$a_n\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_1\beta+a_0$，此數以 $f(\beta)$ 表示。

【例】$f(x)=5x^3-4x^2-3x+7$，則 $f(2)=25$；$f(-1)=1$。

主題二 多項式的常用性質—除法

1.因式與倍式：

(1)設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式，且 $g(x)\neq 0$，若存在一多項式 $q(x)$，使得 $f(x)=g(x)\,q(x)$，則 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式。

(2)若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，則對於任意不為 0 的實數 t 而言，$t\,g(x)$ 也是 $f(x)$ 的因式，且 $g(x)$ 也是 $t\,f(x)$ 的因式。

【例】若 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，

則 x^3-1 是 $x-1$ 與 x^2+x+1 的倍式，$x-1$ 與 x^2+x+1 是 x^3-1 的因式。

2.長除法與綜合除法

【例】設 $f(x)=x^3-7x^2+13$，$g(x)=x+5$，試求出 $f(x)$ 除以 $g(x)$之商式及餘式。

主題三 綜合除法的應用－泰勒形式

我們從一個問題出發。

【例】設 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，試求 $f(0.99)$之近似值至小數點以下第二位。

這個問題並不難解決，在同學們完全不知道有什麼工具可以使用的情形下，還有最後一招「暴力代入法」，把 $x=0.99$ 直接代入 $f(x)$，硬算，就可以把題目要求的 $f(0.99)$直接算出來。但這個題目只有三次方，算起來已經很麻煩了，很容易出錯，如果題目是五次方或是更高次豈不是要算到天荒地老？

我們之前已學過除法法則與綜合除法，事實上，利用這兩項工具，就可以用比較漂亮的手法解決這個問題。

解題的想法是這樣的，如果我們可以把 $f(x)=x^3+x^2+x+1$ 化成 $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 的形態，並確實地計算出 a、b、c、d 的值，那麼，要求 $f(0.99)$，就只需要把 x $=0.99$ 代入 $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 即可，然後得到

$$
\begin{aligned}
f(0.99)&=a(0.99-1)^3+b(0.99-1)^2+c(0.99-1)+d\\
&=a(-0.01)^3+b(-0.01)^2+c(-0.01)+d\\
&\approx c(-0.01)+d \quad \text{（因為題目只要求計算到小數點以下第二位）}
\end{aligned}
$$

看起來是不是好算多了？所以我們接下來的目標，是要想辦法利用除法法則與綜合除法，把 $f(x)=x^3+x^2+x+1$ 化成 $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 的形態。

然而，除了利用除法法則與綜合除法求出 a、b、c、d 的值之外，我們還可以利用之前所學過的「微分」概念，定義出多項函數的泰勒形式（或稱泰勒多項式）。日後，當我們需要計算 a、b、c、d 時，亦可以利用微分來得到我們想要的結果。

$\boxed{\text{定義}}$

設 $f(x)$ 為 n 次多項函數， $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ，則稱

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

為「以 a 為參考點， $f(x)$ 的泰勒形式（或稱泰勒多項式）」。