6-3 高次多項函數圖形與中間值定理

在上一節的課程裡，我們提到了如何求出多項函數圖形與兩軸的交點。雖然我們已經知道，對於函數 $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 而言，我們若想求出此函數圖形與 x 軸的交點，就需要計算出 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 所有的實根。但 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 不一定好解，如果左式能夠因式分解，就可以簡化我們的計算；如果左式完全不能夠因式分解，而且次方較高，那麼解方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 就會變成很困難的事。

【例】試求函數 $y=g(x)=-x^2(x-1)(x+\sqrt{5})$ 與 x 軸的交點坐標。

因為函數本身已經做好因式分解，

所以我們可以很容易地算出 $-x^2(x-1)(x+\sqrt{5})=0$ 的根為 $x=0,1,-\sqrt{5}$ ，

所以我們要求的交點坐標就是 $(0,0)$、$(1,0)$、$(-\sqrt{5},0)$ 。

一般而言，如果我們想解出 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根，可以藉助電腦計算出實根的近似值。但在沒有電腦輔助的情形下，有時我們只需要判斷 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根可能落在哪些整數之間就好，並不需要確切地把根算出來。因為多項函數的圖形是連續不斷的，所以在 6-3 節中，我們想藉由多項函數圖形的連續性引出重要的「中間值定理」，並說明高中時所學到的勘根定理其實就是中間值定理的一個特例。

中間值定理（Intermediate Value Theorem）

設 f 在 $[a,b]$ 上連續，

若 $f(a)\neq f(b)$ 且 $f(a)<N<f(b)$ ，則必存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=N$ 。

勘根定理

設 $f(x)$ 是一個實係數多項函數，a 與 b 是兩個相異實數，

若 $f(a)f(b)<0$（即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號），則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間<u>至少</u>有一個實根。

《說明》當 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號時，函數圖形上兩點$(a，f(a))$、$(b，f(b))$在 x 軸的相反兩側，由於實係數多項函數的圖形是連續不斷的，因此在這兩點之間的圖形必然穿過 x 軸至少一次，所以方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間<u>至少</u>有一個實根。

《思考》若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間是否可能有實根？

【例】利用勘根定理分析 $f(x)=x^3+x-1$ 與 x 軸的相交情形。

【例】利用勘根定理勘定方程式 $2x^3+x^2-7x-5=0$ 在哪些連續整數之間必有實根。