5-3 微積分基本定理

微積分基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）是微積分學裡相當重要的定理，正因為它，我們才能快速地利用微分的逆運算，把函數的積分算出來。但在我們的課程裡依然不提嚴謹的數學證明，只用比較直觀的方式介紹什麼是微積分基本定理，希望同學們先能夠培養出微分與積分這兩種相反關係的直覺，至於更進一步的知識就留待大學時再學習。

設有一函數 $f(x)$ ，$f(x)$ 所圍成的面積為 $S(x)$ ，x 代表某一個點，dx 代表 x 點的微小變化量。當 dx 增加一點點，$S(x)$ 就也會增加一點點，這裡的「$S(x)$ 增加一點點」我們可寫為 $dS(x)$ ，代表面積的微小變化量，而且這個面積可將寬視為 dx ，$f(x)$ 視為長（因為 dx 是非常微量的變化，所以我們可將 $f(x)$ 看成幾乎沒有變化的量），於是由長方形面積公式可得 $dS(x) = f(x)dx$ ，也就是 $\frac{d}{dx}S(x) = f(x)$ 。但因為 $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ ，所以 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$ 。

微積分基本定理（A）

若函數 $f:[a,b] \to R$ 為一連續函數，令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，$x \in [a,b]$ ，

則 $F(x)$ 為可微分函數，且 $F'(x) = f(x)$ ，即 $\frac{d}{dx}\{\int_a^x f(t)dt\} = f(x)$ 。

微積分基本定理（B）

若函數 $f:[a,b] \to R$ 為一連續函數，令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，$x \in [a,b]$ ，

則 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 。

【例】求 $\frac{d}{dx}\{\int_2^x \sqrt{t^2+1}dt\}$ 。

【例】求$\int_0^2 x^5 dx$。

【例】求$\int_{-1}^2 (2x-1)^2 dx$。

【例】設$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,\text{若 } 0\le x\le 1 \\ 2x-x^2, & \text{若 } 1\le x\le 2 \end{cases}$，求$\int_0^2 f(x)dx$。