5-2 反導函數與不定積分

主題一 反導函數

首先，我們先由一個例子開始討論。

《例》設函數 $f(x)=\frac{3}{2}x^2$，我們想知道什麼樣的函數 $F(x)$ 在對 x 微分後可以得到 $f(x)$。

答案其實很簡單，譬如說，$F_1(x)=\frac{1}{2}x^3$ 微分後就是 $f(x)=\frac{3}{2}x^2$，$F_2(x)=\frac{1}{2}x^3-1$ 微分後也是 $f(x)=\frac{3}{2}x^2$，更進一步地，如果假設 $F_3(x)=\frac{1}{2}x^3-k$，其中 k 是任意常數，則 $F_3(x)$ 對 x 微分後的結果還是 $f(x)=\frac{3}{2}x^2$！所以，我們如果想找出什麼樣的 $F(x)$ 在對 x 微分後可以得到 $f(x)$，答案會有無限多個，而這個 $F(x)$，我們就把它稱為 $f(x)$ 的反導函數。

定義 若 $F'(x)=f(x)$（即 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$），

則稱函數 $F(x)$ 為函數 $f(x)$ 的一個反導函數。

主題二 不定積分

我們將求導數或求導函數的過程稱為微分，而將求反導函數的過程稱為積分。而積分分成兩種，一種是第一節介紹過的定積分 $\int_a^b f(x)dx$，一種是沒有上、下限的不定積分 $\int f(x)dx$。

定義 我們將函數 $f(x)$ 的不定積分定義為 $\int f(x)dx=F(x)+k$，其中 $F'(x)=f(x)$，$k\in R$，

k 稱為積分常數。

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 在經過運算之後顯然會是一個值，但不定積分 $\int f(x)dx$ 經過運算之後會是形如 $F(x)+k$ 的函數，也就是我們前面所提到的反導函數的概念；因為 k 可以為任意數，所以 $f(x)$ 的反導函數不唯一。

【例】當 $n \neq 0$ 時，$\int nx^{n-1}dx = x^n + k$ ，k 是積分常數，

$\Rightarrow F(x) = x^n + k$ 是 $f(x) = nx^{n-1}$ 的反導函數。

【例】當 $n \neq -1$ 時，$\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ ，k 是積分常數，

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ 是 $f(x) = x^n$ 的反導函數。

【例】$\int x^8 dx = \dfrac{1}{9}x^9 + k$ ，$k \in R$ 。

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{9}x^9 + k$ 是 $f(x) = x^8$ 的反導函數。

【例】$\int 1dx = x + k$ ，$k \in R$ 。

$\Rightarrow F(x) = x + k$ 是 $f(x) = 1$ 的反導函數。

主題三 積分的線性性質

之前介紹微分時我們曾提過，並不是所有的函數都是處處可微分，譬如 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 時連續但不可微分。其實積分也是，並不是所有的函數都可以在 $[a,b]$ 上積分，譬如 Dichlet function，$f(x) = \begin{cases} 1, \text{若 } x \in Q \\ 0, \text{若 } x \in Q^c \end{cases}$ ，這個函數在所有的 $[a,b]$ 上都不可積分。但在這門課中，我們暫且先不討論不可積分的情形，只單純討論可以積分的函數。

在函數可積分的前提下，積分有兩個運算時很好用的性質，無論是定積分或是不定積分都能使用：

1. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ ，$c \in R$ 。

2. $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

我們也可以把這兩個性質寫在一起，變成：

$$\int \{af(x) \pm bg(x)\}dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$$ ，其中 $a,b \in R$ 。

上面的式子就稱為積分的線性性質。

【例】$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2 dx + 2\int xdx + \int 1dx$

我們在這門課裡曾經學過的線性性質如下：

(1) 若無窮數列 $\{a_n\}$ 、$\{b_n\}$ 都是收斂數列，即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 、 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ，

則 $\lim_{n\to\infty}(ha_n \pm kb_n) = h\lim_{n\to\infty} a_n \pm k\lim_{n\to\infty} b_n = ha \pm kb$ ，其中 $h,k \in R$ 。

(2) 有限級數必滿足 $\sum_{k=1}^{n}(xa_k \pm yb_k) = x\sum_{k=1}^{n} a_k \pm y\sum_{k=1}^{n} b_k$ ，其中 $x,y \in R$ 。

(3) 若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆收斂，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$（無窮級數可以求和），

則 $\sum_{n=1}^{\infty}(xa_n \pm yb_n) = x\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm y\sum_{n=1}^{\infty} b_n = xa \pm yb$ ，其中 $x,y \in R$ 。

(4) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可微分函數，

則 $\frac{d}{dx}\{af(x) \pm bg(x)\} = a\frac{d}{dx}f(x) \pm b\frac{d}{dx}g(x)$ ，其中 $a,b \in R$ 。

(5) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可積分函數，

則 $\int \{af(x) \pm bg(x)\}dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$ ，其中 $a,b \in R$ 。