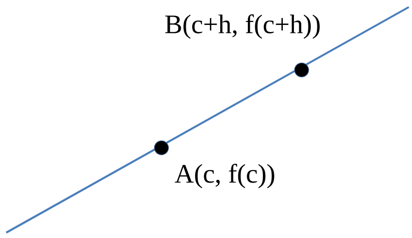
4-5~4-7 函數的微分

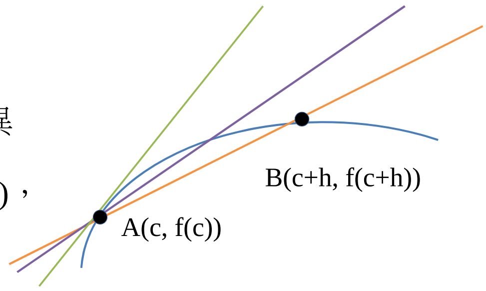
主題一 導數與微分



我們先從幾何的角度出發，討論直線的斜率（slope）。

如果我們想知道某條直線 $y=f(x)$ 的斜率，可以在直線上任取相異的兩點 A、B，令 A 點坐標為(c, f(c))，B 點坐標為(c+h, f(c+h))，則直線斜率 m 為

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\text{。}$$



如果 $y=f(x)$ 的圖形是曲線，我們仍在曲線上任取相異兩點 A、B，令 A 點坐標為(c, f(c))，B 點坐標為(c+h, f(c+h))，則通過 A、B 的割線斜率 m 為

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\text{。}$$

當 B 點沿著 $y=f(x)$ 的圖形趨近 A 點，也就是 h 值趨近於 0 時，通過 A、B 兩點的割線會愈近似於 A 點的切線，即，當 h 值趨近於 0 時，通過 A、B 的割線斜率會趨近於 A 點的切線斜率。如果運用之前學過的極限觀念就可以得到 A 點的切線斜率 m 為

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

【例】若 $y=f(x)=x^2+2x-3$，試求 $x=2$ 時的切線斜率。

我們接著從物理的角度出發，如果我們考慮位置與時間所形成的函數 $x=x(t)$（其中時間 t 為自變數，位置 x 為應變數），並想計算 t_1 至 t_1+h 秒的平均速度與第 t_1 秒的瞬時速度，則 t_1 至 t_1+h 秒的平均速度為 $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t_1+h)-x(t_1)}{(t_1+h)-t_1}=\frac{x(t_1+h)-x(t_1)}{h}$，第 t_1 秒的瞬時速度為 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{x(t_1+h)-x(t_1)}{h}$。

回到幾何的角度對照，我們會發現物理上提到的「第 t_1 秒的瞬時速度 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{x(t_1+h)-x(t_1)}{h}$」，就相當於「函數 $x=x(t)$ 在 t_1 點的切線斜率 m」。

【例】若 $x=x(t)=t^3-t+1$，則：(1)計算 1 到 5 秒的平均速度；(2)計算第 1 秒的瞬時速度。

由上面的討論，我們可以定義出導數（derivative）與可微分（differentiable）的概念：

導數與可微分的定義

(1) 設 $f(x)$ 為一函數，若 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 存在，

則稱此極限為 $f(x)$ 在 $x=c$ 的導數，以 $f'(c)$ 表示之，即 $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$。

另外，設 $h=x-c$，則當 h 趨近於 0 時 x 趨近於 c，

所以 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 亦可表示為 $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$。

(2) 設 $f(x)$ 為一函數，若 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 存在，則稱此極限為 $f(x)$ 在 $x=c$ 可微分，

且 $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 為 $f(x)$ 在 $x=c$ 之切線斜率。

【例】若 $f(x)=3x-1$，求 $f'(5)$。

【例】求 $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 在 $(2,\dfrac{1}{8})$ 上的切線方程式。

主題二 導函數

主題一所介紹的導數 $f'(c)$，其幾何意義就是「函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 之切線斜率」，所以函數在某點上的導數，計算出來的結果是一個值。那麼主題二要介紹的「導函數」又是什麼呢？

考慮 $y=f(x)=x^2$，任取 $a\in R$，則我們可由計算得到 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a$。

令 $a=1$，則 $f'(1)=2$；

令 $a=\sqrt{3}$，則 $f'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$；

令 $a=-\dfrac{1}{5}$，則 $f'(-\dfrac{1}{5})=-\dfrac{2}{5}$；

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

任意取一個 a，就能找到一個對應的 $f'(a)$，於是，可以把 a 視為自變數，$f'(a)$ 視為應變數，a 與 $f'(a)$ 之間形成一個函數關係，這個關係就叫做「導函數」（derivative）。附帶一提的是，導函數是一個函數，並不是一個值。而在本例中，函數 $f'(x)=2x$ 就是 $f(x)=x^2$ 的導函數。

重新把定義整理如下，可得到：

(1) 導數：$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$；

(2) 導函數：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

那麼，到底什麼是微分呢？

微分其實就是指「求函數的導數或導函數的過程」，微分可視為一個動作。

能夠求導數或導函數的函數，就說它是「可微分函數」或「此函數可微分」。

往後我們會經常利用多項函數 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ 的微分，它的微分需要用到一些基本公式以及微分的性質。在此，我們先介紹基本公式，微分的性質就留待本節的主題四再介紹。

【例】若 $f(x)=x$ ，則 $f'(x)=1$ 。

【例】若 $f(x)=k$ ，其中 $k\in R$ ，則 $f'(x)=0$ 。

【例】設 n 為正整數， $f(x)=x^n$ ，試證明 $f'(x)=nx^{n-1}$ 。

（事實上，當 n 是任意實數時， $f'(x)=nx^{n-1}$ 依然成立。）

提醒同學，原本的函數 $f(x)$ ，在微分得到其導函數 $f'(x)$ 後，定義域可能會改變， $f'(x)$ 的定義域不見得會跟 $f(x)$ 的定義域相同。以下我們舉一個例子來說明這件事。

【例】若 $f(x)=\sqrt{x}$ ，試比較 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的定義域。

主題三 微分算子

先前已經介紹過，對函數 $f(x)$ 求導函數過程就稱為微分。所以我們可以把「微分」看成是一個機器，把函數 $f(x)$ 丟到這個機器裡，設定好這個機器的功用是對 x 微分，然後機器就會輸出導函數 $f'(x)$ 來。

這個機器的運作方式，我們給它一個數學名詞叫做「算子」，因為這個機器做的動作是「微分」，所以我們把它叫做「微分算子」。

定義 我們把「對 x 微分的微分算子」記為 $\frac{d}{dx}$，而 $\frac{d}{dx}f(x)$ 就稱為「$f(x)$ 對 x 微分」。

所以，由導函數的概念可以得到：$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$。

符號表示 $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$。

符號 $\frac{dy}{dx}$ 是由萊布尼茲所提出的，往後我們可以直接把 $f'(x)$ 寫成 $\frac{d}{dx}f(x)$。然而，$\frac{dy}{dx}$ 寫法的好用之處是什麼？為什麼我們已經有了 $f'(x)$ 這個表示導函數的記號還需要記號 $\frac{d}{dx}f(x)$？再者，dx 又是什麼意思呢？

我們從前學過 Δx 與 Δy 的概念，Δx 代表的是 x 的變化量，Δy 代表的是 y 的變化量，而當 $\Delta x\to 0$ 時，我們可以得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c).$$

dx 的概念跟 Δx 很像，dx 代表的是「極微小的 x 變化量」，所以 dx 可視為 $\Delta x\to 0$ 的結果，所以我們可以寫出：

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

這裡的 Δx 仍是 $f'(c)$ 的定義裡所提到的 h，即 $\Delta x=h$。所以 dx 代表的是「極微小的 x 變化量」，dy 代表的是「極微小的 y 變化量」。d 是「微量」，或者說「量非常非常小」的概念。

至於我們為什麼需要記號 $\frac{d}{dx}f(x)$？等同學們真正進入微積分課程裡自然會理解它的妙用，這個符號之所以能夠沿用幾百年是有它的道理的。

主題四 微分的常用性質

微分的性質　設函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 可微分，則：

(1) $\frac{d}{dx}\{k\cdot f(x)\}=k\frac{d}{dx}f(x)$ ，其中 $k\in R$ 。

(2) $\frac{d}{dx}\{f(x)\pm g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$ 。

(3) $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\{\frac{d}{dx}f(x)\}g(x)+f(x)\{\frac{d}{dx}g(x)\}$ 。

(4) 若 $g(x)\neq 0$ ，則 $\frac{d}{dx}\{\frac{f(x)}{g(x)}\}=\frac{\{\frac{d}{dx}f(x)\}g(x)-f(x)\{\frac{d}{dx}g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$ 。

【例】若 $f(x)=x^3$ ，則 $f'(x)=3x^2$ 。

【例】若 $g(x)=-2x^2$ ，則 $g'(x)=-4x$ 。

【例】若 $h(x)=x^3-2x^2$ ，則 $h'(x)=3x^2-4x$ 。

【例】若 $f(x)=3x^5-4x^3+2x^2-\sqrt{3}x-1$ ，則 $f'(x)=15x^4-12x^2+4x-\sqrt{3}$ 。

【例】若 $F(x)=(2x+1)(x^2-x+5)$ ，則 $F'(x)=6x^2-2x+9$ 。

【例】試求出 $\frac{d}{dx}\{\frac{2x^2+5x-6}{3x^4+1}\}$ 。

主題五 連續與微分之間的關係

再複習一次導函數的定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。若 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在，則導函數 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在，所以導函數的存在性即極限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的存在性。而在我們一開始介紹函數的極限時，就曾提過極限的存在性與它的左、右極限同時存在，如果某極限的左、右極限存在且相等，某極限就會存在。於是：

「$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 及 $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在且相等」。

在此，我們定義 $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 為 $f(x)$ 的右導函數，$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 為 $f(x)$ 的左導函數。我們當然也能針對 $f(x)$ 在 c 的導數 $f'(c)$ 討論 $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 的存在性，也就是說

「$f'(c)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 c 的右導數與左導數存在且相等」。

此對等條件提供了我們另一種考慮導數存在性的方法。

【例】若 $f(x)=|x|$，試求 $f(x)$ 在 $x=0$ 時的導數。

《結論》從這個例子裡，我們發現，連續函數不能保證函數在每個點都能微分。

定理 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

【例】設 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4, & 若\ x\le 1\\ x^2+2\ , & 若\ x>1\end{cases}$，試問 $f(x)$ 在 $x=1$ 處是否連續，又是否可微分？

一些較困難的自我挑戰題

1. 設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-x+1-a}{x-1}, & 若\ x\neq 1\\ b, & 若\ x=1\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 處可微分，則：

(1) 此函數在 $x=1$ 時是否連續？________。

(2) 試\推導出 a 與 b 的恆等式：_________。

(3) 若 $f'(1)=4$，則數對 $(a,b)=$_______。

【答】(1) 是；(2) $b=2a-1$；(3) $(4,7)$。

2. 設 $f(x)$ 為二次可微分函數，且 $f(0)=f'(0)=0$、$f''(0)=1$，

若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & 若\ x\neq 0\\ 0, & 若\ x=0\end{cases}$

(1) F 是否在 $x=0$ 處連續？試說明之。

(2) $F'(0)$ 是否存在？若是，求出其值。

【答】(1) $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=0=F(0)$，因為極限值等於函數值，故連續。(2) $F'(0)=\dfrac{1}{2}$。