

4-4 函數的連續性

函數在某一點上連續的定義

設函數 $f(x)$ 滿足下列三個性質：

$$(1) f(c) \text{ 存在}; (2) \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ 存在}; (3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c);$$

則稱 $f(x)$ 在 $x = c$ 處連續。

函數在某開區上連續的定義

設函數 $f(x)$ 在 (a, b) 中每一點都連續，則稱 $f(x)$ 在 (a, b) 上連續。

函數處處連續的定義

設函數 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上連續，則稱 $f(x)$ 為處處連續。

【例】 多項函數、指數函數、對數函數、正弦函數、餘弦函數都是處處連續的函數。

連續的性質 設函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $x = c$ 處連續，則：

$$(1) k \cdot f(x) \text{ 在 } x = c \text{ 處連續，其中 } k \in R。$$

$$(2) f(x) \pm g(x) \text{ 在 } x = c \text{ 處連續。}$$

$$(3) f(x)g(x) \text{ 在 } x = c \text{ 處連續。}$$

$$(4) \text{ 當 } g(x) \neq 0 \text{ 時，} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 在 } x = c \text{ 處連續。}$$

合成函數的連續

若函數 g 在 c 連續且函數 f 在 $g(c)$ 連續，則 $(f \circ g)(x)$ 在 c 亦連續，

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(g(c))。$$

【例】設函數 $f(x) = |x|$ ， $g(x) = 1 - 2x^2$ ，試討論 $(f \circ g)(x)$ 在 $x = 2$ 時的連續性。

【例】請找出使得函數 $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ 連續的區間。

一些較困難的自我挑戰題

1. 設函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{kx^2 + x - 4k - 2}{x - 2}, & \text{若 } x \neq 2 \\ 3 & \text{若 } x = 2 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在 $x = 2$ 連續，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{若 } x < 1 \\ -4 - x^2, & \text{若 } 1 \leq x \leq 10 \\ 6x^2 + 46, & \text{若 } x > 10 \end{cases}$ 在 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 時不連續。

3. 判斷函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{若 } x \neq 1 \\ 2 & \text{若 } x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 時是否連續？ $\underline{\hspace{2cm}}$ ；原因是 $\underline{\hspace{4cm}}$ 。

4. 設 $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2}, & \text{若 } x \neq 2 \\ \frac{7}{3}, & \text{若 } x = 2 \end{cases}$ 是定義在 $(-1, \infty)$ 上的連續函數，求 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 設 $[x]$ 表高斯符號，而 $f(x) = [x]$ ，則 $f(x)$ 的不連續點為 $\underline{\hspace{4cm}}$ 。

1. 【答】 $\frac{1}{2}$ ；2. 【答】10；3. 【答】是； $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$ ；4. 【答】(3, -10)；5. 【答】不連續點所構成的集合為 $\{x \mid x \in \mathbf{Z}\}$ 。