4-1~4-3 函數的極限與夾擠定理

主題一 函數的極限

考慮 $f(x)=x+1$、$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & 若\ x\neq 1\\ 1\quad, & 若\ x=1\end{cases}$ 的圖形，請問在 x 趨近於 1 時，這些函數的高度會趨近於哪一個值？

定義

設 $f(x)$ 為一函數，若 x 從 a 的左右兩側趨近 a 時（但 $x\neq a$），$f(x)$ 也趨近於一個固定的實數值 l，則稱當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 的極限為 l，且記為 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$。

【註】(1) 函數 $f(x)$ 在某一點 a 的極限值不一定存在。

(2) 函數 $f(x)$ 在某一點 a 的極限值與 $f(x)$ 的定義域無關。

主題二 函數極限的性質(A)

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$，$L,M\in R$，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a} k=k$；

(2) $\lim\limits_{x\to a} x=a$；

(3) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL$；

(4) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\pm M$；

(5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=LM$；

(6) 若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$。

主題三 函數極限的性質(B)

設$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ ，$L,M\in R$ ，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a} p(x)=p(a)$ ，其中 $p(x)$ 是多項函數。

(2) $\lim\limits_{x\to a} R(x)=R(a)$ ，其中 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函數，$P(x)$ 、$Q(x)$ 是多項式，$Q(x)\neq 0$ 。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}, & \text{若 } n \text{ 是奇數}\\ \sqrt[n]{a}, & \text{若 } n \text{ 是偶數且 } a>0\end{cases}$ 。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\begin{cases}\sqrt[n]{L}, & \text{若 } n \text{ 是奇數}\\ \sqrt[n]{L}, & \text{若 } n \text{ 是偶數且 } L>0\end{cases}$ 。

《註》在同學們學習 4-4 的連續觀念之後再回過頭看這件事，若 $f(x)$ 為連續函數，

則我們可將(4)直接寫成：$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\begin{cases}\sqrt[n]{f(a)}, & \text{若 } n \text{ 是奇數}\\ \sqrt[n]{f(a)}, & \text{若 } n \text{ 是偶數且 } f(a)>0\end{cases}$ 。

(5) 若 $f(g(x))$ 存在且$\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ ，$\lim\limits_{y\to b} f(y)=f(b)$ ，則$\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a} g(x))=f(b)$ 。

【例】(1) 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}$ ；(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}-5)$ ；(3) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ；

(4) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)-1}{x}$ 。

【例】(1) 設 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ ，求 $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ；

(2) 設 $g(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ ，求 $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ ；

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\}$ ；(4) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{2x^2-x+3}$ ；(5) 求 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^2+x-1}{x^3+4}}$ 。

【例】設 $g(x)=x+1$， $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ ，求 $\lim\limits_{x\to 4} f(g(x))$ 。

主題四 函數在無窮遠處的極限

1.考慮 $f:(0,\infty)\to R$ ， $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ，則當 x 值愈大時， $\dfrac{1}{x}$ 的值愈接近 0 。

$$f(1)=\frac{1}{1}=1$$

$$f(10)=\frac{1}{10}=0.1$$

$$f(100)=\frac{1}{100}=0.01$$

$$f(1000)=\frac{1}{1000}=0.001$$

$$\vdots$$

$$f(10^{100})=\frac{1}{10^{100}}$$

$$\vdots$$

2.如果考慮 $f:(-\infty,0)\to R$ ， $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ，則當 x 值愈小時， $\dfrac{1}{x}$ 的值愈接近 0 。

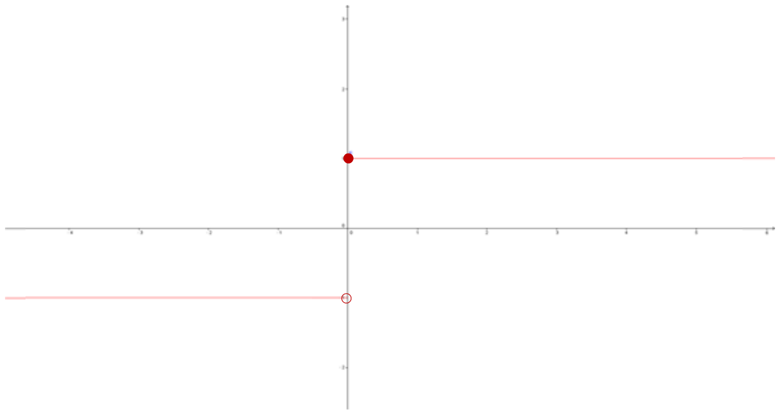
3.由先前兩點可知，我們不只能討論當 x 趨近於 a 時函數 $f(x)$ 的極限，也能讓 x 趨近於 ∞ 或 $-\infty$，然後分別討論函數 $f(x)$ 在無窮遠處的極限。

定義 設函數 $f:(0,\infty)\to R$ ，若當 x 趨近於 ∞ 時， $f(x)$ 的值可任意地靠近唯一的實數 l ，則我們說「 $f(x)$ 在 x 趨近於 ∞ 時的極限值為 l 」，記為 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ 。

定義 設函數 $f:(-\infty,0)\to R$ ，若當 x 趨近於 $-\infty$ 時， $f(x)$ 的值可任意地靠近唯一的實數 l ，則我們說「 $f(x)$ 在 x 趨近於 $-\infty$ 時的極限值為 l 」，記為 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ 。

主題五 函數的單邊極限

觀察 $f(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ge 0\\ -1, & 若\ x<0\end{cases}$ 的圖形，並觀察當 x 趨近於 0 時，函數 $f(x)$ 的高度會趨近於哪一個值？



當 x 趨近於 0 時，從左邊的方向來看，函數 $f(x)$ 的高度會趨近於 -1，從右邊的方向來看，函數 $f(x)$ 的高度會趨近於 1。我們在討論函數 $f(x)$ 的極限值，清楚地瞭解到函數 $f(x)$ 在 x 趨近於 0 時，如果從左邊逼近的高度跟從右邊逼近的高度不同，$f(x)$ 在 x 趨近於 0 時的極限值就不存在。因此，我們可以知道上述的例子中，$\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

然而，即使 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在，我們也還是可以從圖形裡觀察到，如果 x 單純從 0 的左邊逼近到 0，$f(x)$ 的高度會趨近於 -1；從 0 的右邊逼近到 0，$f(x)$ 的高度會趨近於 1。所以我們可以定義像「左極限」與「右極限」這樣的單邊極限，不去看左右兩邊趨近的高度是否一致，只單純地考慮從左邊逼近或是從右邊逼近，$f(x)$ 的高度會趨近於誰。

定義 若當 x 從右邊趨近於 a 時，$f(x)$ 的值趨近於 c_1，則 c_1 稱為「當 x 從右邊趨近於 a 時，$f(x)$ 的右極限」，記為 $\lim_{x\to a^+} f(x)=c_1$。

定義 若當 x 從左邊趨近於 a 時，$f(x)$ 的值趨近於 c_2，則 c_2 稱為「當 x 從左邊趨近於 a 時，$f(x)$ 的左極限」，記為 $\lim_{x\to a^-} f(x)=c_2$。

《補充說明》

(1) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=l$

(2) 若 $\lim_{x\to a^+} f(x)=c_1$ ，$\lim_{x\to a^-} f(x)=c_2$ 但 $c_1\neq c_2$ ，則 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在。

(3) 若 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 、$\lim_{x\to a^-} f(x)$ 至少一者不存在，則 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在。

【例】求 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 。

【例】設 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, & 若\ x\geq 2 \\ 4x & ,若\ x<2 \end{cases}$ ，求：(1) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ；(2) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ；(3) $\lim_{x\to 2} f(x)$ 。

主題六 夾擠定理

夾擠定理

設 I 為包含 a 的開區間。

若 $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ ，$\forall x\in I$ （但在 a 點可能不成立）且 $\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g(x)=l$ ，

則 $\lim_{x\to a} f(x)=l$ 。

【註】若 $x^2-\frac{x^4}{2}\leq f(x)\leq x^2$ ，求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ 之值。