3-5 反函數

1.反函數（inverse functions）的例子：

例 1：函數 $y=f(x)=x+3$，將自變數 x 與應變數 y 的角色顛倒，原本是，y 是以 x 表示的函數，現在故意寫成 x 是以 y 來表示的函數，也就是 $x=y-3$，y 變成新的自變數，x 變成新的應變數。我們如果還是習慣用 x 表示自變數，y 表示應變數的話，可以把 $x=y-3$ 再寫為 $y=f^{-1}(\mathrm{x})=x-3$，如此，我們就稱 $y=f^{-1}(x)=x-3$ 是 $y=f(x)=x+3$ 的反函數。

例 2：設 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，令 $f:A\to B$，$y=f(x)=x+3$，

$\Rightarrow f^{-1}:B\to A$，$y=f^{-1}(x)=x-3$。

《註》 f 的定義域＝ f^{-1}的值域；

f 的值域＝ f^{-1}的定義域。

例 3：函數 $\mathrm{f}(x)=x^2$ 在 R 上沒有反函數。

例 4：函數 $f(\mathrm{x})=x^2$ (當 $x\geq 0$)與函數 $g(x)=\sqrt{x}$ 有下列關係：

$x \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$（$f$ 把 x 對應到 y，g 把 y 映回 x；g 把 y 對應到 x，f 把 x 映回 y），

如此，我們說 $f(x)=x^2$ (當 $x\geq 0$)與 $g(x)=\sqrt{x}$ 互為反函數。

例 5：同底的指數函數 $f(x)=a^x$ 與對數函數 $g(x)=\log_a x$ 互為反函數。

2.反函數的定義：

若函數 f、g 同時滿足下列兩點：

(1) 對於 g 的定義域中所有的點 x 恆有 $f(g(x))=x$，

(2) 對於 f 的定義域中所有的點 x 恆有 $g(f(x))=x$，

則稱 f、g 互為反函數，且 $f(x)$的反函數 g(x)可記做 $f^{-1}(x)$，所以

$$f(f^{-1}(x))=x，\ f^{-1}(f(x))=x$$

此時 $f(x)$的定義域是 $f^{-1}(x)$的值域，而 $f(x)$的值域是 $f^{-1}(x)$的定義域。

3.一對一函數的定義：

若 $f:A\to B$，$\forall a,b\in A$ 滿足當 $f(a)=f(b)$ 時，$a=b$，則 f 稱為一對一函數。

4. $f(x)$的反函數 $f^{-1}(x)$何時必存在？

【答案】$f(x)$具有反函數 $f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)$為一對一函數。

【例】 $f(x)=\sqrt{x}+1$是否為一對一函數？