

3-4 函數的運算與合成

主題一 函數的四則運算

設函數 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ，則函數 f 、 g 具有下列的運算性質：

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ ，且 $(f \pm g)(x)$ 的定義域為 $A \cap B$ 。
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ，且 $(fg)(x)$ 的定義域為 $A \cap B$ 。
3. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ，且 $(\frac{f}{g})(x)$ 的定義域為 $(A \cap B) - \{x \mid g(x) = 0\}$ 。

【例】 設 $f(x) = \sqrt{x+1}$ ， $g(x) = 2x+1$ ，試求 $(f+g)(x)$ 、 $(fg)(x)$ 、 $(\frac{f}{g})(x)$ 及它們的定義域。

主題二 合成函數 (Compositions of Function)

函數的合成也是運算方式的一種，簡單來說，我們給定二個函數 $g: A \rightarrow B$ 、 $f: B \rightarrow C$ ，就可以定義 f 與 g 的合成函數 $(f \circ g): A \rightarrow C$ 為 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 。

【定義】 f 與 g 的合成函數定義為 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ，且 $(f \circ g)$ 的定義域為「 g 的定義域中，所有使得 $g(x)$ 均在 $f(x)$ 的定義域裡」的 x 所形成的集合。

【例】 設 $f(x) = x^2$ ， $g(x) = x+1$ ，試求 $(f \circ g)(x)$ 。

【例】 設 $f(x) = \sqrt{x}$ ， $g(x) = x^2 + 1$ ，試求 $(f \circ g)(x)$ 。

【例】 設 $f(x) = 2x+4$ ， $g(x) = x^2 + 2x + 5$ ，試求 $(f \circ g)(x)$ 及 $(g \circ f)(x)$ 。