2－3、2－4 無窮級數及其斂散性

主題一 無窮級數

1. 設｛a_n｝為一無窮數列，則級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$就稱為無窮級數。

2. 我們假設一個級數前 n 項的和 S_n ，也就是說 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。更進一步地， S_n 亦稱為無窮級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$的部份和。

3. 因為 $S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，$S_3=a_1+a_2+a_3$，…，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，所以我們可以把 S_1，S_2，S_3，…，S_n 視為一組數列｛S_n｝，並把｛S_n｝稱為部份和所形成的數列。

4. 考慮數列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$的極限，並以$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$的極限值來決定無窮級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$的和。

   (1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$。此時$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不僅代表級數本身，同時也告訴我們$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和為 s，我們稱無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

   (2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，也就是說數列｛S_n｝發散，則我們稱無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散，此時$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不能求和。

《說明》如何求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 呢？首先將$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 用 n 來表示，再計算$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 。

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(a)若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$，我們稱無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(b)若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，也就是說數列｛S_n｝發散，我們稱無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

【例】試判斷無窮級數$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$的斂散性。

【例】數列｛$\dfrac{n+1}{n}$｝的極限為 1，亦可寫為$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$。

主題三 無窮等比級數的收斂與發散

1.無窮等比級數的求和公式：

一首項為 a，公比為 r，(a、$r\neq 0$)的無窮等比級數為 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$，

設其前 n 項的和為 S_n，即 $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$，$S_n=\begin{cases} na, r=1 \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, r\neq 1 \end{cases}$

則無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$的和即數列｛$S_n$｝的極限。

2. (1)當｜r｜＜1 時：

當 n 趨近於無限大時，r^n 趨近於 0，所以 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 趨近於 $\dfrac{a}{1-r}$，

也就是無窮數列｛S_n｝收斂，且其極限為 $\dfrac{a}{1-r}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}$。

此時無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$收斂，且和為 $\dfrac{a}{1-r}$。

即 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}$。

(2)當 $r=1$ 時：

當 n 趨近於無限大時，$S_n=na$ 不會趨近於一個定數，

也就是無窮數列｛S_n｝發散，所以 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$發散。

(3) 當 $r>1$ 或 $r\leq 1$ 時：

此時 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，當 n 趨近於無限大時，$r^n$ 發散，也就是無窮數列｛S_n｝發散。

所以 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$發散。

$\boxed{\text{結論}}$ 設一無窮等比級數首項為 a，公比為 r，(a、$r\neq 0$)，則當－1＜r＜1 時此無窮等比級數的和收斂，且其和為 $\dfrac{a}{1-r}$。

$\boxed{\text{比較}}$ 無窮等比數列收斂的條件為－1＜r≤1。

【例】試判斷下列各級數是否收斂，若收斂，則求出其和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{7}{4})^n$ ；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e}{\pi})^n$ ；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ ；(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 。

主題四 利用無窮等比級數的收斂性將循環小數化為分數的形態

循環小數 $0.\overline{5}=0.5555\cdots$ 可寫為無窮等比級數的形態：

$$0.\overline{5}=0.5555\cdots=0.5+0.05+0.005+\cdots+0.5\times(0.1)^{n-1}+\cdots$$

其中首項 $a=0.5$，公比 $r=0.1$。因為它的公比 r 滿足 $-1<r<1$ 的條件，所以 $0.5+0.05+0.005+\cdots+0.5\times(0.1)^{n-1}+\cdots$ 是個收斂級數，且其級數和為 $\frac{a}{1-r}=\frac{0.5}{1-0.1}=\frac{5}{9}$ 。

由此，我們也可以證得循環小數 $0.\overline{5}$ 是有理數。

循環小數 $0.\overline{51}=0.5151\cdots$ 亦可由同樣的方法寫為無窮等比級數的形態：

$$\begin{aligned}0.\overline{51}&=0.5151\cdots\\&=0.5+0.01+0.005+0.0001+\cdots+0.5\times(0.01)^{n-1}+0.01\times(0.01)^{n-1}+\cdots\\&=(0.5+0.005+\cdots+0.5\times(0.01)^{n-1}+\cdots)+(0.01+0.0001+\cdots+0.01\times(0.01)^{n-1}+\cdots)\end{aligned}$$

可拆成兩個不同的無窮等比級數，第一個無窮等比級數的首項 $a=0.5$，公比 $r=0.01$，第二個無窮等比級數的首項 $a=0.01$，公比 $r=0.01$。因為兩個無窮等比級數的公比皆滿足 $-1<r<1$ 的條件，所以 $0.5+0.005+\cdots+0.5\times(0.01)^{n-1}+\cdots$ 及 $0.01+0.0001+\cdots+0.01\times(0.01)^{n-1}+\cdots$ 都是收斂級數，且其級數和分別為 $\frac{0.5}{1-0.01}=\frac{50}{99}$ 及 $\frac{0.01}{1-0.01}=\frac{1}{99}$，因此 $0.\overline{51}=\frac{50}{99}+\frac{1}{99}=\frac{51}{99}$，所以循環小數 $0.\overline{51}$ 也是有理數。

由同樣的手法，我們可以證明所有的循環小數都是有理數。

【例】試將下列循環小數化成分數：(1) $0.\overline{2}$ ；(2) $0.\overline{42}$ ；(3) $0.4\overline{29}$ 。

Ans：(1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{42}{99}$ (3) $\frac{425}{990}$

【例】試將下列循環小數化成分數：(1) $0.\overline{3}$ ；(2) $0.\overline{12}$ 。