數學建模 MA3067-* 期末考

國立中央大學, 一月 11 日, 2022

Problem 1. (20pts) 試求出以下初始值問題的解：

$$x'' - 3x' - 4x = 30e^{2t}\,, \qquad x(0) = x'(0) = 0\,.$$

Problem 2. (20pts) 假設 $y, z \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ 滿足

$$\int_a^b \big[y(x)\eta(x) + z(x)\eta'(x)\big]\,dx = 0 \qquad \forall\, \eta \in \big\{w \in \mathscr{D}^1([a,b];\mathbb{R}) \,\big|\, w(a) = w(b) = 0\big\}\,.$$

證明 $z \in \mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{R})$ 且對所有 $x \in [a,b]$ 等式 $z'(x) = y(x)$ 恆成立。

Problem 3. (20pts) 證明在單位球面上連接兩點 A_0 與 B_0 的最短路徑為大圓的一部份。

Problem 4. 本題探討使用變分原理求取以下最佳化問題的解：

$$\boxed{\text{找一條左端點為 } (0,0)\text{、右端點落在直線 } x=1 \text{ 上的曲線 } C \text{ 使得 } C \text{ 的曲線長度最短。}} \qquad (\Delta)$$

試依循以下小題完成此問題。

(1) (5pts) 不妨假設該曲線為一函數 $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ 的函數圖形。令 $I(y)$ 表示函數 y 的函數圖形之曲線長，試寫出 $I(y)$。

(2) (5pts) 接續 (1) 的假設與結論，試寫出上述最佳化問題 (Δ) 的 admissible set $\mathcal{A}$ 以及其對應的 test function space $\mathcal{N}$。

(3) (5pts) 將 (1) 中的 $I(y)$ 寫成 $I(y) = \displaystyle\int_0^1 L(x, y(x), y'(x))\,dx$，且 $\widehat{y}$ 為 I 的一個 minimizer。若將函數 L 寫成三變數函數的形式 $L = L(x,y,p)$，試證明

$$\int_0^1 \Big[L_y(x, \widehat{y}(x), \widehat{y}'(x))\eta(x) + L_p(x, y(x), y'(x))\eta'(x)\Big]\,dx = 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathcal{N}\,.$$

(4) (5pts) 假設 minimizer $\widehat{y}$ 為一個二次連續可微函數，試求出 $\widehat{y}$ 需滿足之微分方程式。

(5) (5pts) 試說明為何 $\widehat{y}$ 滿足邊界條件 $\widehat{y}(0) = 0$ 且 $\widehat{y}'(1) = 0$。

(6) (5pts) 試解由 (4) 與 (5) 構成的邊界值問題，並從過程中求出 minimizer $\widehat{y}$。

Problem 5. 假設 $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 為一連續函數，且 $L = L(x,y,p)$ 之偏微分 L_y, L_p 在 $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 連續。考慮最小值問題 $\displaystyle\inf_{y \in \mathcal{A}} I(y)$，其中

$$I(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx\,,$$

且 $\mathcal{A} = \big\{y \in \mathscr{D}^1([a,b];\mathbb{R}) \,\big|\, y(a) = A_0, y(b) = B_0\big\}$。令 $\mathcal{N} = \big\{y \in \mathscr{D}^1([a,b];\mathbb{R}) \,\big|\, \eta(a) = \eta(b) = 0\big\}$ 為對應的 space of test functions，並假設 $\widehat{y}$ 是一個 minimizer。

(1) (5pts) 給定 $a \leqslant d_1 < c < d_2 \leqslant b$，試說明存在 $\eta \in \mathcal{N}$ 滿足 $\eta(c) = 1$ 且在 $[d_1, d_2]$ 區間外面有 $\eta = 0$。

(2) (5pts) 假設 $\widehat{y}$ 在 $[d_1, c)$ 與 $(c, d_2]$ 上連續可微，且極限 $\lim\limits_{x\to c^+} \widehat{y}'(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to c^-} \widehat{y}'(x)$ 皆存在但不相等（這對應的函數圖形上的點 $(c, \widehat{y}(c))$ 被稱做 corner）。若 η 為 (1) 中提及的 test function，證明

$$\int_a^b \eta(x)\Big[\frac{d}{dx}L_p(x, \widehat{y}(x), \widehat{y}'(x)) - L_y(x, \widehat{y}(x), \widehat{y}'(x))\Big]\, dx = 0\,. \tag{$\star$}$$

(3) (10pts) 在 (2) 的假設之下，對 $(\star)$ 做分部積分後證明

$$L_p\big(c, \widehat{y}(c), \widehat{y}'(c^+)\big) = L_p\big(c, \widehat{y}(c), \widehat{y}'(c^-)\big)\,, \tag{$\star\star$}$$

其中 $\lim\limits_{x\to c^+} \widehat{y}'(x) = \widehat{y}'(c^+)$ 與 $\lim\limits_{x\to c^-} \widehat{y}'(x) = \widehat{y}'(c^-)$。等式 $(\star\star)$ 被稱為 **first corner condition**.

(4) (10pts) 考慮極小旋轉曲面問題。它可以被轉化成最小值問題

$$\inf_{y\in\mathcal{A}} \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx\,,$$

在此我們假設 admissible set $\mathcal{A}$ 中的 A_0, B_0 皆為正數。證明此最小值問題的 minimizer $\widehat{y}$ 沒有 corner。

Hint of (1): 可畫圖表示一個這樣的 η 函數。

Hint of (2): 注意 Euler-Lagrange equation 的 strong form 何時滿足。

Hint of (3): 做分部積分之前，你需要將積分區域分段。

Hint of (4): 使用 first corner condition。