

# Mathematical Modeling - Fall 2021, Final Project

2021/09/29

## 1 傳染病之傳播

這兩年新冠肺炎的疫情肆虐全球，關於如何在疫情與經濟間取得平衡成為各國政府關注的問題。我們在課堂中會介紹傳染病的最基本 SIR 模型，這個模型是在不考慮大範圍人口流動的情況，在一個小的封閉區域中所有人都可能互相接觸的封閉環境中的傳染病模型。

1. 試著修改 SIR 模型以符合下面兩個額外的假設：

- (a) 康復者 (R 族群) 有一定的比例會是可重複感染的；
- (b) 受感染者會有一比例的人數死亡。

2. 承上題，增加一變數  $V$  表示接種疫苗的族群數量，且假設接種疫苗的族群仍有一定的比例會感染。若接種疫苗的族群數目會隨著時間流逝而增加。試寫下一傳染病模型符合上述的假設。

3. 將臺灣分成北北基 (B)、桃竹苗 (T)、中彰投 (C)、雲嘉南 (N)、高屏 (K)、宜蘭 (Y)、花東 (H) 七個區域，每個區域內部的 SIR 人群分開計數。在封城（七區不交流）的設定之下，則此七個區域的人口不會互相交流，因此個別區域的  $S, I, R$  獨立滿足 SIR 模型（或是上面兩小題中所推導出之模型）。在不封城的設定之下，該如何建立更合理之傳染病模型？請依照下列的假設進行 ODE 建模。

- (a) 假設地域遠近還是有影響人的交流。
- (b) 假設發病人口數多的地域會導致人口暫時外移。
- (c) 更多你能想到的合理假設。

4. 假設臺灣的經濟與各區之間的交流以及總因疫情死亡的人口數相關（因疫情死亡的人口數愈高則經濟活動愈少）。在封城的情況下，個別的區域的經濟規模與人口數成正比，但不封城的情況下各區交流的情況愈好則整體的經濟狀況也愈好。在這個前提之下去試著建立一個經濟狀況的模型，並針對所建立之經濟模型去提出如何進行疫情警戒之建議。

## 2 二線道交通流

在課堂中我們提到一線道公路上的交通流模型。我們首先針對一線道交通流進行速度函數的設定。假設車流密度為  $\rho$ ，請設定出一個速度函數  $V(\rho)$  滿足下面要求：

公路上速度上限為  $A$ ，速度下限  $B$ 。在此  $A > B$ ，且除了塞車的狀況駕駛人皆不會違規。

假設現在有兩線道，其上的車流密度分別為  $\rho_1$  與  $\rho_2$ ，此兩函數皆為  $x$  與  $t$  的函數。進一步假設：

1. 兩車道上的駕駛人駕駛習慣一致（皆由一線道交通流所給定的速度函數來行駛）。

2. 兩車道的速度差  $C$  以上時有固定比率的車會換道行駛（由速度慢往速度快的車道移動）。
3. 只有公路的起點允許車輛進入公路，公路的終點允許車輛離開公路。

試著給定不同的初始條件與邊界條件（以及數值  $A, B, C$ ）進行模擬，觀察是否出現所謂的塞車現象（部份路段時速低於  $B$ ）。

### 3 散熱鰭片的熱分布

散熱鰭片可用來移除發熱元件上的熱量。在這個 project 中，我們想要建模一個薄形散熱鰭片上的熱分布模型。我們假設

1. 散熱鰭片的一面貼著一個均勻發熱元件（元件上每一點發熱的效率相同），散熱片需覆蓋整個發熱元件。
2. 散熱鰭片為高度為  $\delta$  之薄片狀均勻物質，其中  $\delta$  非常小，所以我們可以將散熱片視為二維的物件。因此，溫度  $u$  為  $x, y, t$  的函數，亦即  $x, y$  座標相同的點其溫度視為相同。
3. 在散熱片上的熱量主要由傳導、對流兩個方式進行轉移：
  - (a) 傳導的方式造成了熱在水平方向的移動，是散熱片上的熱由溫度高的地方往溫度低的地方移動，此時熱仍然在散熱片中累積並未散出。這個部份課堂上會做較詳細的解釋。
  - (b) 對流的方式造成了熱在垂直方向的移動，是藉由加熱散熱片上方的空氣，因熱空氣密度高往上升而上方的冷空氣下降的對流而帶走散熱片中的積熱。此效應可以想成在散熱片上的每一點都有一機制將熱給吸走，其 heat source 形如

$$q(x, y, t) = -H[u(x, y, t) - u_b],$$

其中  $u_b$  代表的是室溫，而  $H$  為一被稱為熱對流係數 (convective heat transfer coefficient) 的常數（在本專題中被假設為  $H = 0.005\text{W}/\text{cm}^2\text{C}$ ）。關於 heat source 的作用在課堂中亦會提及。

我們對下列的幾個問題有興趣：

1. 在以同樣材質製作散熱片的前提下，同面積之圓形散熱片與方形散熱片之散熱何者較佳（試著定義何謂散熱最佳）？假設發熱元件是圓形或是正方形兩種不同的情況，結論是否相同？
2. 假設可採用金、銀、鋁等材料製作散熱片，在同樣的預算前提下，以哪種材質能製造出散熱效果最好的散熱片？
3. 不同於上述兩小題散熱片是氣冷，在這一小題中採用水冷式散熱，其中用來散熱的水量固定，因此水溫會因為吸收散熱片的溫度而升高。在假設水本身不會散熱的前提之下建立一個新的模型，並試著以此模型「驗證」當今桌上型電腦的水冷式散熱器內含的水量是否「足夠」用以壓制 CPU 發熱。

## 4 會變相之熱傳導

本專題探討加熱一極細金屬棒之熱傳導問題。

1. 首先，我們將極細的金屬棒視為一維的物件，因此金屬棒的熱流只在金屬棒延伸的方向（意即熱只會往兩端點方向移動），也就是說金屬棒的邊界只有端點兩點。
2. 只有在金屬棒的一端點加熱，且加熱熱源有功率的上限。
3. 金屬棒在加熱的過程中不會膨脹。
4. 金屬的熱傳導係數隨著溫度的上升而遞減（可以自己去找個滿足這個條件的金屬或是自己設定）。
5. 金屬在過了某個溫度之後會融化成液體，此時熱傳導係數也明顯與固體狀態時不同。假設金屬液化之後的熱傳導係數比金屬時的狀態更低。

我們有興趣的問題是採取一直輸出最大功率的加熱方式是否是最快能讓左端點達到融點的方式？注意到為了建模的需要，我們需要在原本的熱方程中加入點熱源以及與溫度相關的熱傳導係數：

1. 應該如何在熱方程中呈現點熱源呢？而又該如果對這樣的熱源進行數值模擬？
2. 熱傳導係數該如何設定？

如果除了左右兩端之外也可往垂直方向散熱呢？亦即我們將上述假設 1 移除，那對於同樣的問題，我們又該如何進行建模？（參考第二題）

## 5 草原上的牛群

在課堂上我們提到了獵食者獵物模型，然而在考慮生物相關問題時，不同的生物間所有的競合關係皆有不同。給定一只有草原與牛群這兩個生物的封閉生態系。假設牛群除了本身的數量會造成的擴散效應外，牛群亦會因為水草豐美的程度進行移動。在此設定下，若  $D$  為此封閉生態系所在的區域，則牛群的數量  $u$  與水草的豐美程度  $v$  皆為  $x, y, t$  的函數。試著依下列之更多假設進行 PDE 建模。

1. 假設牛群在水草豐美程度低於某一水準的區域無法進食繁殖只能外移，因此任何一處的水草都不會被吃完。
2. 在牛群愈多的地方，因為排泄物也愈多的關係，對於水草來說養份愈多因此水草也會愈豐美。
3. 更多你能想像的合理假設。

注意到為了完整建模以進行模擬，一個合適的邊界條件是需要的。封閉的系統可能有下面兩種狀況：

1. 牛隻無法穿透邊界，亦即可能  $D$  區域的邊界有圍籬將  $D$  與外界隔開。

2. 部份邊界為懸崖，因此有牛隻可能不小心會掉下懸崖。非懸崖的邊界則同上述假設牛隻無法穿透。

此外，我們也必須回答該如何針對牛隻排泄物對水草豐美程度的影響。請依上述各點進行建模以及模擬。