Calculus MA1001-A Sample Midterm 1

National Central University, Oct. 26, 2018

Problem 1. 定義或定理敘述題共兩小題！

Problem 2. 重要定理（的敘述）與證明。（不考 ε-δ 的證明）

Problem 3. (1) Show that $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ for all $x \geqslant 0$. Note that you have to start with the well-known inequality $\sin x \leqslant x$ for all $x \geqslant 0$.

(2) Find the limit $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$. (Do not use L'Hôspital's rule even if you know this).

Problem 4. For given real numbers a, b, define function $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)\cos(\cot x) & \text{if } \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ a\tan x + b & \text{if } \ -\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant 0\,. \end{cases}$$

(1) Find all values of a and b such that f is continuous at 0.

(2) Find all values of a and b such that f is differentiable at 0.

(3) Can f be continuously differentiable?

Hint: You can use the conclusion from Problem 3.

Problem 5. Suppose that y is an implicit function defined by the relation $1 + x = \sin(x + y^2)$.

(1) Find $\frac{dy}{dx}$.

(2) Find the concavity of the graph of the implicit function y near the point $(-1, 1)$.

Problem 6. Find all the slant asymptotes of the graph of the function

$$f(x) = \frac{1 - x - \sqrt{9x^2 - 18x + 1}}{4}\,.$$

Problem 7. Let $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) = -2\cos x - \frac{1}{2}\sin(2x)$.

(1) Find the inflection points of the graph of f.

(2) Use the second derivative test to find all the relative extrema of f'.

(3) Show that $|f(x) - f(y)| \leqslant 3|x - y|$ for all $x, y \in [0, 2\pi]$.

Problem 8. (Extra credit) 某同學被要求寫下框中敘述

> Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a continuous function such that f has only one critical point $c\in(a,b)$. If $f(c)$ is a local extremum of f, then $f(c)$ is an absolute extremum of f.

的證明。該同學證明如下但並未完成，請於下方證明分別敘述 (A) 定理與 (B) 定理的名稱與定理內容，並幫助該同學完成此題證明之 (C) 與 (D) 部份。

Proof. 不失一般性，我們可以假設 $f(c)$ 為 f 在 $[a,b]$ 區間上的相對極小值。由相對極小值的定義，存在 $\delta>0$ 使得

$$f(x)\geqslant f(c)\qquad \forall\, x\in(c-\delta,c+\delta)\subseteq[a,b]\,.$$

Claim: 存在兩點 x_1,x_2 分別落在 $(c-\delta,c)$ 與 $(c,c+\delta)$ 中滿足 $f(x_1)>f(c)$ and $f(x_2)>f(c)$。
Proof of Claim:

(C)

這個 Claim 證明了 $f(c)$ 不可能是 f 在 $[a,b]$ 區間上的最大值.

接下來我們用矛盾證法證明 $f(c)$ 是 f 在 $[a,b]$ 區間上的最小值。假設 $f(c)$ 不是 f 在 $[a,b]$ 區間上的最小值。因為 f 在 $[a,b]$ 區間上連續，由 (A) 定理可知 f 在 $[a,b]$ 閉區間上取得到最小值。假設在 $[a,b]$ 區間中的一點 x_0，$f(x_0)$ 為 f 在 $[a,b]$ 區間上的最小值。因為我們假設 $f(c)$ 不是 f 在 $[a,b]$ 區間上的最小值，$x_0\neq c$，而如果 $a<x_0<b$，則由 (B) 定理我們得知 $f'(x_0)=0$ 此結果表示 x_0 為 f 除 c 之外另一個 critical point，此與題目假設 f 只有 c 這個 critical point 矛盾。因此，x_0 必為 $[a,b]$ 區間的端點。

1. 如果 $x_0=a$（亦即 $f(a)$ 是 f 在 $[a,b]$ 區間上取到的最小值），則 $f(a)<f(c)$。由 f 的連續性得知 f 在 $[a,c]$ 區間中的某點 x_0 取到 f 在 $[a,c]$ 區間上的最大值。則 $x_0\neq a$。此外，由 Claim 所提供的 x_1 滿足 $f(x_1)>f(c)$，因此 $x_0\neq c$。所以我們必有 $x_0\in(a,c)$，而由 (B) 定理我們得到 x_0 必為 f 的另一個 critical point 這個矛盾。

2. 如果 $x_0=b$（亦即 $f(b)$ 是 f 在 $[a,b]$ 區間上取到的最小值），則 $f(b)<f(c)$。（接下來完成這個 case 矛盾的論述）

(D)

由上述討論，我們得知 $f(c)$ 必為 f 在 $[a,b]$ 區間上的最小值。 □