

April 12, 2008

國立中央大學數學系大學申請入學考試

一. 填充題：每題 6 分

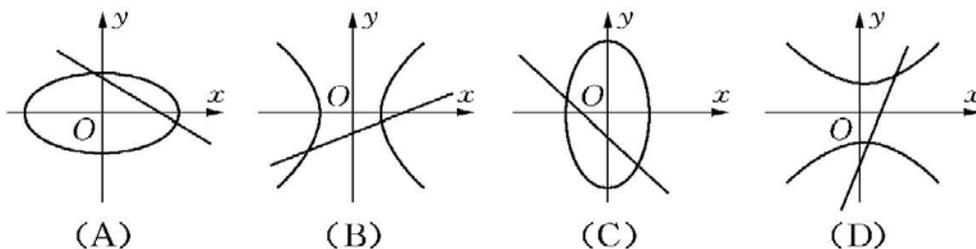
1. 令 $53^x = 9$ ， $477^y = 243$ ，則 $\frac{2}{x} - \frac{5}{y} = ?$
2. 一個密封的信封裡有一張卡片，卡片上有一個個位數字，下列 4 個敘述有 3 個對 1 個錯：
 - I. 此一個位數是 5
 - II. 此一個位數不是 6
 - III. 此一個位數是 7
 - IV. 此一個位數不是 8下列何者必需是正確？

(A) I 為正確 (B) I 為錯誤 (C) II 為錯誤 (D) III 為正確 (E) IV 為正確

3. 考慮所有適合下列條件的三角形 ABC ， AB 邊長 = AC 邊長， D 為 AC 邊上的一點滿足 BD 線段垂直 AC 邊， AD 與 CD 的邊長都為整數，且 BD 邊長的平方為 51，求 AC 邊長的最小可能值。

(A) 28 (B) 26 (C) 12 (D) 10 (E) 8

4. 令 $L = 43200$ ， n 為正整數， n 整除 L ， 9 整除 n 且 25 不能整除 n ，則 n 共有幾個？
5. 綠、黃、藍、紅四枝原子筆各有其筆套，一歲小寶好奇地將四個筆套全部拔掉，混合後，試著將筆套套入原子筆。則四個筆套均套入其所屬之原子筆的機率為何？
6. 如果 $a, b \in \mathbb{R}$ 滿足 $ab \neq 0$ ，則直線 $ax - y + b = 0$ 及二次曲線 $ax^2 + by^2 = ab$ 的圖形為何？



7. 令 O 為 $\triangle ABC$ 之內點滿足 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，則 $\triangle ABC$ 之面積除以 $\triangle AOC$ 之面積為何？

8. 若下列聯立方程式對 (x, y) 無任何實數解

$$\begin{cases} -(1 + \cos \theta)x + y = 2 \\ x - (1 + \sin \theta)y = 3 \end{cases}$$

則 $\cos 2\theta$ 之所有可能之值為何？

April 12, 2008

國立中央大學數學系大學申請入學考試

二. 演算題：每題 13 分

1. 令 A 、 B 與 C 為 3 個非負整數，滿足 $A + B + C = 11$ 。找出 $ABC + AB + BC + CA$ 的最大可能值。
2. 令實數三維空間上有二點 $A(1, 2, 3)$ ， $B(-1, 1, 4)$ 及一平面 $E: x - 2y + 3z = 13$ 。若點 P 在 E 上移動，求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 之最小值及此時 P 點之坐標。 $(\overline{PA}$ 代表 P, A 兩點間之距離)
3. 假設 $t \in \mathbb{R}$ 為一固定實數使得 α, β 為方程式 $x^2 - tx - 1 = 0$ 的 2 個不同實根。如果 $[\alpha, \beta]$ 為函數 $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$ 的定義域，求 $\max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) - \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$ 。在此 $\max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$ 表示函數 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 中的最大值， $\min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$ 表示函數 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 中的最小值。
4. 令 a 是任意一給定的實數且定義數列 a_1, a_2, a_3, \dots 為 $a_1 = a$ 及 $a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 1$ ， $n \geq 2$ 。
 - (a) 試求 a 的範圍使得 $\{a_n\}$ 是一單調數列(即是完全遞增數列或是完全遞減數列)。(4 分)
 - (b) 試求 a 的範圍使得 $\{a_n\}$ 是一有界數列。(4 分)
 - (c) 試求 a 的範圍使得 $\{a_n\}$ 是一收斂數列，此時並計算其收斂值。(5 分)