

數值組博士班入學考

題目共六題任選五題，每題二十分。

1. 簡答題：(需說明理由)

(a) 使用二次微分計算公式 $f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$ ，假設 $f(x)$ 為連續函數，請問有沒有可能不管 a 是多少，此微分公式在某種情況所計算出來的值都是零。

(b) 某生使用矩形法與梯形法計算 $\sin(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 的數值積分，如果將此區域切割為 100 等份，結果發現計算出來的積分數值是相同的，請問程式有錯嗎？

(c) 在使用數值微分法與數值積分法時，請問兩者數值方法是不是當區間 h 越小時越準，請說明你的理由？

(d) 有個數值積分公式如下：

$$\int_{-1}^1 p(x) dx \approx c(p(a) + p(b))$$

如果 $p(x)$ 為多項式函式，請問此公式最多能算到幾次多項式函式都沒有誤差，同時 a 、 b 、 c 分別是多少？

2. 數值積分：

(a) 請用三點插分公式(interpolant)推導以下 Simpson $\frac{1}{3}$ 的積分公式：

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1))$$

(b) 請利用高斯點積分法以最少的積分點求以下的積分值：

$$\int_1^2 \int_0^1 xy^3 dy dx$$

Legendre Polynomial	zeros	weights
x	0	2
$\frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

3. 牛頓迭代法與最小平方差：

(a) 請利用泰勒展開式推導三個變數的牛頓迭代法的求根公式：

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = 0$$

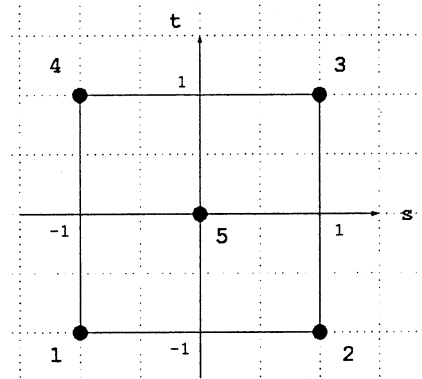
(b) 有 n 個點 (x_i, y_i) , $i \in [1, n]$, 要使用 $y = ae^{bx}$ 函數取得最小平方差, 請推導 a 與 b 的公式?

4. 插分函數與樣條函數：

(a) 有五個在 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上的平面點 (s_j, t_j) , $j \in [1, 5]$, 請推導此五點的插分多項式 $L_i(s, t)$, 使得

$$L_i(s_j, t_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$L_i(s, t)$ 順序由左下角逆時鐘排列, 原點 $(0, 0)$ 為 $L_5(s, t)$ 。(答案非唯一)

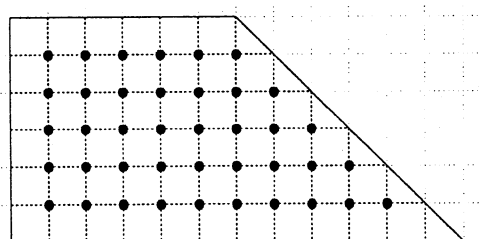


(b) 有三個平面點 $(0, 1)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 0)$ 要使用兩個二次 spline 函式來內插, 假設左邊的 spline 函式 $S_1(x)$ 要滿足 $S'_1(0) = 1$, 則 $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 分別是多少?

5. 矩陣組合：

使用有限差分法(finite difference method) 計算 $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ 邊界值問題於以下的區域, 假設二次微分都是使用三點中間差分公式, 且邊界值都已知, 請問

- (a) [5 分] 最後組成的矩陣大小為何?
- (b) [5 分] 如果要讓組成矩陣帶寬(bandwidth) 較小, 則點的編號順序應該是垂直排列還是水平排列較好?
- (c) [10 分] 計算矩陣的零元素數量佔全部矩陣元素的比例



6. 二次 Runge-Kutta 公式：

有一微分方程式： $y' = f(x, y)$ ，起始條件 $y(x_0) = y_0$ ，要以二次 Runge-Kutta 方法計算微分方程式的數值解，假設其一般式為：

$$y_{i+1} = y_i + h \{ a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i + b_1 h, y_i + b_2 h y'_i) \}$$

其中 $h = x_{i+1} - x_i$ ，請導出 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 的三個關係式為：

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$