單元 3: 繪圖
(課本 §1.3)

問. 如何由 $y = f(x)$ 的圖形繪出下列 5 種經過轉換後的函數圖形?

(i) $f(x) + a$

(ii) $f(x - a)$

(iii) $f(-x)$

(iv) $-f(x)$

(v) $cf(x), c > 0$

答:

(i) $y = f(x) + a$: 垂直平移 (vertical translation), 可分爲

$$\begin{cases} \text{上移 } a \text{ 個單位, 若 } a > 0; \\ \text{下移 } |a| \text{ 個單位, 若 } a < 0. \end{cases}$$

如圖示,

$$y = x^2;\ y = x^2 + 2;\ y = x^2 - 3$$

的繪製.

(ii) $y = f(x-a)$: 水平平移 (horizontal translation), 可分爲

$$\begin{cases} \text{右移 } a \text{ 個單位, 若 } a > 0; \\ \text{左移 } |a| \text{ 個單位, 若 } a < 0. \end{cases}$$

如圖示,

$$y = x^2;\ y = (x-1)^2;\ y = (x+1)^2$$

的繪製.

(iii) $y = f(-x)$: 對 y-軸鏡射 (reflection about y-axis).

如圖示,

$$y = \sqrt{x};\ y = \sqrt{-x}$$

的繪製.

(iv) $y = -f(x)$: 對 x-軸鏡射 (reflection about x-axis).

如圖示,

$$y=\sqrt{x};\ y=-\sqrt{x}$$

的繪製.

(v) $y=cf(x)$: $\begin{cases} \text{壓縮, 若 } 0<c<1; \\ \text{伸展, 若 } c>1. \end{cases}$

如圖示,

$$y=x^2;\ y=2x^2;\ y=\frac{1}{2}x^2$$

的繪製.

例 1. 試由

$$y=\sqrt{x},\ x\geq 0$$

的圖形, 繪出

$$y=-\sqrt{x-3}-1,\ x\geq 3$$

的圖形.

<解> 轉換步驟如下:

$$\sqrt{x}\to\sqrt{x-3}\ (\text{右移三單位})$$

$$\to -\sqrt{x-3}\ (\text{對 } x\text{-軸鏡射})$$

$$\to -\sqrt{x-3}-1 \text{ (下移一單位)}$$

故, 對應的圖形如圖示.

例 2. 試由

$$y=\frac{1}{x}, x>0$$

的圖形, 繪出

$$y=\frac{x}{x+1}, x>-1$$

的圖形.

<解> 先化簡成容易轉換的形式:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{x+1-1}{x+1} \\ &= 1-\frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

所以轉換步驟如下:

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x+1} \text{ (左移一單位)}$$

$$\to -\frac{1}{x+1} \text{ (對 } x\text{-軸鏡射)}$$

$$\to 1-\frac{1}{x+1} \text{ (上移一單位)}$$

因此, 對應的圖形如圖示.

問. 如何將一些變化很大的資料 (data), 如溶液中氫離子 (hydrogen-ion) 的濃度 $[H^+]$, 其單位: moles/liter, 變化範圍:

$$10^{-14} \sim 1$$

如

$$\text{純水 (pure water)} = 10^{-7}$$

$$\text{蘇打 (baking soda)} = 10^{-9}$$

$$\text{胃酸 (stomach acid)} = 10^{-1}$$

很清楚地描繪在一條線上?

答:

1. 線性尺度 (linear scale): 這些資料將會非常集中在 0 附近, 不夠清楚.

   如圖示.

2. 對數尺度 (logarithmic scale): 定義

$$\text{pH 值} = -\log[\text{H}^+]$$

得 pH 值的變化範圍爲

$$14 \sim 0$$

且對應的圖形如圖示.

同理, 描述二量間之關係的平面上的點也可經由對數轉換 (logarithmic transformation), 亦即, 將線性尺度 (linear scale) 取

$$\log_{10}$$

後使得

$$10^x$$

標示在

$$10^0 = 1$$

的

$$\begin{cases} \text{右邊 } x \text{ 個單位,} & \text{若 } x > 0 \\ \text{左邊 } |x| \text{ 個單位,} & \text{若 } x < 0 \end{cases}$$

而清楚地繪出, 如資料點 $= (10, 7)$, $(100, 25)$, $(1000, 34)$, 則

(i) 線性尺度: 過於集中在原點, 不夠清楚.

如圖示.

(ii) 對數-線性尺度 (log-linear scale): 均勻地間隔開, 較清楚.

如圖示.

另外針對冪函數 (power function)

$$y = cx^r$$

及指數函數 (exponential function)

$$y = ba^x$$

也可以用對數轉換將其轉換成以直線描述的線性關係 (linear relationship):

冪函數: 將

$$y = cx^r$$

的兩邊取 log, 得

$$\log y = \log c + r \log x$$

令 $Y = \log y$, $X = \log x$. 得

$$Y = \log c + rX$$

一斜率爲 r 的直線. 如,

$$y = 2x^3$$

經對數轉換後, 得一斜率爲 3 的直線

$$Y = \log 2 + 3X$$

其圖形稱爲對數-對數 (log-log) 圖, 如圖示.

例 3. 植物乾重 (dry weight per plant) 與植物密度 (plant density) 的關係在 log-log 圖中是一斜率爲 $-3/2$ 的直線. 若植物密度 (plant density) 的範圍是介於 10^2 與 10^4 plants/m^2 之間且當密度 (density) = 100 plants/m^2 時, 植物乾重 (dry weight) = 10 grams. 試求植物乾重 (dry weight) 與植物密度 (plant density) 的函數關係 (functional relationship).

<解> 令 y = 植物乾重, x = 植物密度. 由題意知,

$$\log y = C - \frac{3}{2} \log x,\ 10^2 \leq x \leq 10^4$$

其中 C: 未知常數 (待求). 代入已知條件

$$x = 100,\ \ y = 10$$

得

$$\log 10 = C - \frac{3}{2} \log 100$$

化簡得

$$1 = C - \frac{3}{2}2$$

所以,

$$C = 4$$

因此,

$$\log y = 4 - \frac{3}{2}\log x$$

兩邊取 10^x:

$$\begin{aligned} 10^{\log y} &= 10^4 10^{-\frac{3}{2}\log x} \\ &= 10^4 10^{\log x^{-\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

根據同底數的指數函數與對數函數互為反運算, 得

$$y = 10^4 x^{-\frac{3}{2}},\ 10^2 \le x \le 10^4$$

指數函數: 將

$$y = ba^x$$

的兩邊取 log, 得

$$\log y = \log b + x\log a$$

令 $Y = \log y$. 可得

$$Y = \log b + x \log a$$

一斜率爲 $\log a$ 的直線, 並稱其圖形爲一對數-線性 (log-linear) 圖 (或半-對數 (semi-log) 圖).

例 4. 由實驗求 Po^{210} (Polonium 210) 的半生期 (half-life) 的方法如下: 針對不同的時間 t, 測得經過 t 時後, 剩餘的數量 (amount) $W(t)$. 得資料 $= \{(t, W(t))\}$. 將資料繪成半-對數 (semi-log) 圖後, 得一斜率爲 -0.0022/天 的直線. 試求 Po^{210} 的半生期.

<解> 由放射性退化律 (law of radioactive decay) 知,

$$W(t) = W(0)e^{-\lambda t}, \, t \geq 0$$

兩邊取 log, 得

$$\log W(t) = \log W(0) - \lambda t \log e$$

一斜率爲 $-\lambda \log e$ 的直線. 因爲資料的半-對數 (semi-log) 圖中的斜率爲 -0.0022/天, 故

$$0.0022/\text{天} = \lambda \log e$$

由此得,

$$\lambda = \frac{0.0022/天}{\log e} = 0.0051/天$$

所以, 根據關係式

$$\ln 2 = \lambda T_h$$

得半生期

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{\ln 2}{\lambda} \\ &= \frac{\ln 2}{0.0051/天} \\ &= \frac{\ln 2}{0.0051}天 \\ &= 136.8天 \end{aligned}$$