量子計算的數學基礎 MA5501

Homework Assignment 4

Due Jun. 18. 2023

以下皆為程式題，請繳 matlab code。

Problem 1. 給定一 2×2 unitary 矩陣 U，寫程式（取名為 OneQubitGateDecomp）找出 δ, θ, ξ 與 η（function [eta, xi, theta, delta] = OneQubitGateDecomp(U)）使得

$$U = \mathrm{Ph}(\delta)\mathrm{R}_z(\xi)\mathrm{R}_y(\theta)\mathrm{R}_z(\eta) = \mathrm{R}_z(\xi)\mathrm{R}_y(\theta)\mathrm{R}_z(\eta)\mathrm{Ph}(\delta)\,.$$

Problem 2. 給定一 $(2n) \times (2n)$ unitary 矩陣 $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$，其中 $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$ 皆為 $n \times n$ 矩陣，寫程式（取名為 CSD）找出 $n \times n$ unitary 矩陣 U_1, U_2, V_1, V_2 以及 $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n$（function [U1,U2,V1,V2,theta] = CSD(Q)，其中 theta $= [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n]$ 為一向量）使得

$$Q = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C} & -\mathrm{S} \\ \mathrm{S} & \mathrm{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\dagger & 0 \\ 0 & V_2^\dagger \end{bmatrix},$$

其中 $\mathrm{C} = \mathrm{diag}(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$ 且 $\mathrm{S} = \mathrm{diag}(\sin\theta_1, \sin\theta_2, \cdots, \sin\theta_n)$。你可以使用 matlab 內建的 svd、qr 以及 flip 指令。其中注意到

1. U_1, V_1 可由 Q_{11} 的奇異值分解得到。
2. 令 $A = U_1^\dagger Q_{12}$。要找出 V_2 使得 AV_2 為一對角線非正的上三角矩陣。由於是由最右邊一行往左做行運算而得，我們可以用 flip 指令兩次改變 A 矩陣行與列的順序，然後對此矩陣做一般的列運算（使用 qr 指令）。
3. 注意到用 flip 指令兩次改變 A 矩陣行與列的順序，相當於 A 左右各乘上只有右上到左下對角線元素為 1 的矩陣 D。因此上述步驟的列運算會得到 $DAD = QR$，其中 Q 是 unitary 矩陣然後 R 是上三角矩陣。因為 $D^{-1} = D$，我們得到 $A = DQRD = (DQD)(DRD)$。在此 DQD 仍為上三角矩陣，而 DRD 仍為 unitary 矩陣。
4. 最後注意到因為要求 DQD 的對角線元素非正，當發現 DQD 的某對角線元素為正值時需要做對應的調整。
5. 同樣的原理可用於找到 U_2，最後對 $\begin{bmatrix} U_1^\dagger & 0 \\ 0 & U_2^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\dagger & 0 \\ 0 & V_2^\dagger \end{bmatrix}$ 再進一步對 U_2 做調整。

Problem 3. 寫一程式（取名為 GRAY）找出 n-bit Gray code：此程式有兩個輸入變數 n, k, 其中 $1 \leqslant k \leqslant 2^n$，而 $\mathrm{GRAY}(n, m)$ 吐出 n-bit Gray code 的第 m 個數字。

Problem 4. 假設 $\boldsymbol{a} = (0, a_y, a_z)$ 為一單位向量，$n \in \mathbb{N}$ 且令 $N = 2^n$。給定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{R}$，寫程式（取名為 MultiCtrlRotDecomp）找出 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ 與 $i_1, i_2, \cdots, i_N$（function [theta, I] = MultiCtrlRotDecomp(alpha)，其中 theta $= (\theta_1, \cdots, \theta_N)$, $I = [i_1, \cdots, i_N]$ 與 alpha $= [\alpha_1, \cdots, \alpha_N]$ 皆為向量）使得

$$\begin{aligned} &\mathrm{blkdiag}(R_{\boldsymbol{a}}(\alpha_1), R_{\boldsymbol{a}}(\alpha_2), \cdots, R_{\boldsymbol{a}}(\alpha_N)) \\ &\qquad = \mathbf{CNOT}_{i_N,n+1}(\mathrm{I} \otimes R_{\boldsymbol{a}}(\theta_N))\mathbf{CNOT}_{i_{N-1},n+1}(\mathrm{I} \otimes R_{\boldsymbol{a}}(\theta_{N-1})) \cdots \mathbf{CNOT}_{i_1,n+1}(\mathrm{I} \otimes R_{\boldsymbol{a}}(\theta_1))\,. \end{aligned}$$

在此注意到 $\mathrm{I} \otimes R_{\boldsymbol{a}}(\theta_k)$ 即課堂上所提到的 R_k。