Mathematical Modeling MA3067-* Midterm

National Central University, Nov. 09, 2022

Problem 1. (1) (5pts) 將萬有引力常數 G 的量綱以基礎量綱長度、時間、質量（分別以 L, T, M 表示）表示，亦即找出 (α, β, γ) 使得 $[G] = L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$。

(2) (15pts) 假設行星繞太陽的軌道為一圓形，且已知行星繞太陽一圈的時間（即行星年）只與軌道圓半徑、萬有引力常數以及太陽質量有關。試以 Pi 定理證明 Kepler 行星運動第三定律：行星繞太陽運動的週期的平方與行星與太陽的距離的立方成正比。

Problem 2. 如圖 1 所示，一質量為 m 的物體繫在一虎克常數 k 的完美彈簧上之運動軌跡 $x(t)$ 滿足微分方程

$$x''(t) + \frac{r}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0\,,$$

其中 $r > 0$ 為磨擦係數。給定初始條件 $x(0) = R$ 與 $\dot{x}(0) = 0$，並假設已知 x 只與 $t, \widetilde{r} \equiv \dfrac{r}{m}, \widetilde{k} \equiv \dfrac{k}{m}$ 和 R 有關。

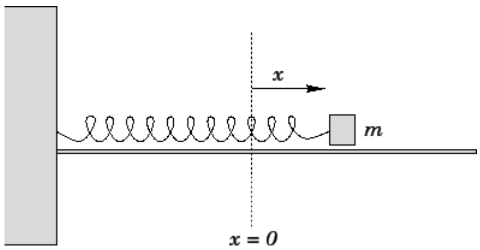

Figure 1: 質量為 m 的物體繫在一彈簧上進行水平方向的運動

(1) (8pts) 引進度量物理量的尺度 t_c 與 ℓ_c，並令 $\bar{t} = t/t_c$ 及 $\bar{x} = x/\ell_c$。上述初始值問題可改寫成無量綱形式得到

$$\bar{x}''(\bar{t}) + \bar{r}\,\bar{x}'(\bar{t}) + \bar{k}\,\bar{x}(\bar{t}) = 0\,, \qquad \bar{x}(0) = x_0\,, \bar{x}'(0) = x_1\,.$$

求出 $\bar{r}$, $\bar{k}$, x_0 與 x_1。

(2) (12pts) 假設無量綱量 $\varepsilon = \dfrac{r}{\sqrt{mk}} = \dfrac{\widetilde{r}}{\sqrt{\widetilde{k}}}$ 遠小於 1，試選取合適的特徵尺度並找出一好的近似模型用來描述無量綱位置 $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t})$ 的微分方程式。

Problem 3. Evaluate the line integral $\displaystyle\oint_C x^2y^2\,dx + xy\,dy$, where C consists of the arc of the parabola $y = x^2$ from $(0,0)$ to $(1,1)$ and the line segments from $(1,1)$ to $(0,1)$ and from $(0,1)$ to $(0,0)$, oriented counterclockwise, by

(1) (15pts) computing the line integral directly, and

(2) (15pts) computing the line integral by Green's Theorem.

（背面尚有題目）

Problem 4. Let D be the region bounded by the parabolic cylinder $z = 1 - x^2$ and the planes $z = 0$, $y = 0$, and $y + z = 2$ (see Figure 2), and $\mathbf{N}$ is the outward-pointing normal on Σ.

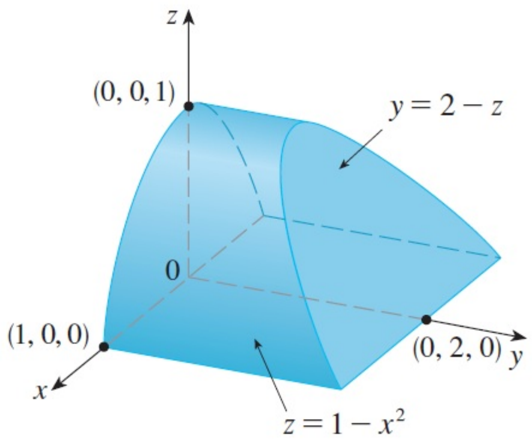

Figure 2: The region D in Problem 4

Let $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^3$ be a vector field given by

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\,\mathbf{j} + x\cos y\,\mathbf{k}\,.$$

Complete the following.

(1) (15pts) Find the surface integral $\displaystyle\int_{\Sigma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, where Σ_1 is the non-planar（非平面）part of Σ（亦即 Σ_1 是 Σ 柱面的曲面部份）.

(2) (15pts) Use the divergence theorem to evaluate the surface integral $\displaystyle\int_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$.