

Exercise Problem 4

Due Dec. 28, 2022

注意：此次作業為程式題，繳交時請附上 matlab code 與題目所要求的數值結果以供檢驗該 code 是否能跑出該數值結果。每個問題的 code 請繳交一個 .m 檔，所需要的函數也都寫進同一個 .m 檔中。

Problem 1. 在一支點懸掛一個彈簧，彈簧末端系一質量為 m 的物體，這就構成了一個彈簧擺（如 Figure 1 所示）。假設彈簧無質量、虎克常數是 k 且在不受力的情況下長度是 L ，而物體在垂直於地面（平行於重力方向）的平面上運動。若在時間 t 時物體到支點的距離為 $r(t)$ 而垂線到物體與支點連線的方向角為 $\theta(t)$ （逆時針方向為正）。則 r 與 θ 滿足以下微分方程：

$$\begin{aligned}r'' - r(\theta')^2 &= g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - L), \\2r'\theta' + r\theta'' &= -g \sin \theta.\end{aligned}$$

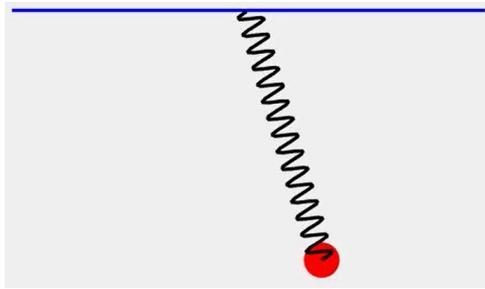
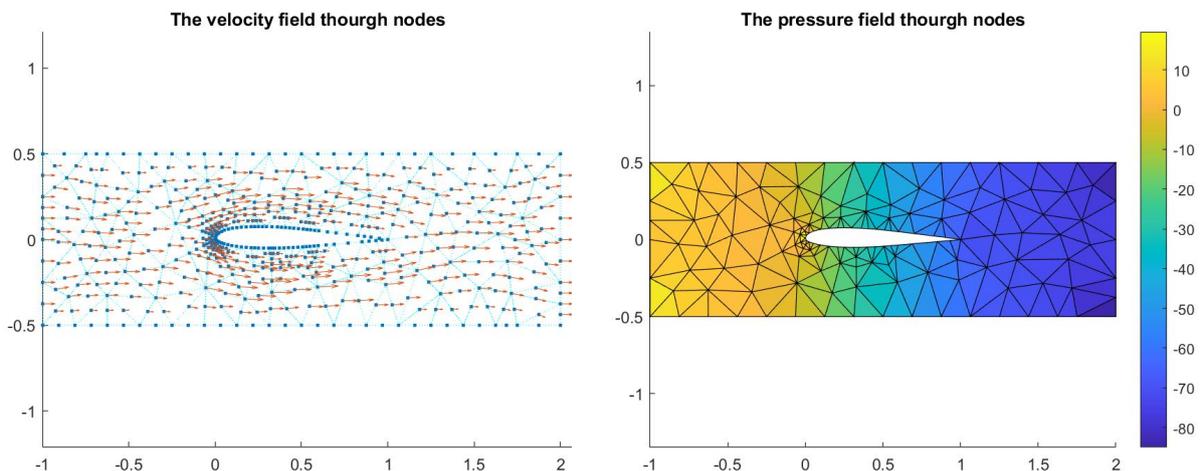


Figure 1: 彈簧擺

給定實驗條件：將物體移至與垂線夾方向角 $\pi/12$ 之處且彈簧長度為 L 後於靜止狀態放開。假設選取某特徵尺度後無量綱之各參數皆為 1，意即上述微分方程中 $m = g = L = k = 1$ （注意，角度無量綱）。設定相對應的初始條件，並以 Matlab 的 ode45 指令求解此初始值問題在時間區間 $[0, 10]$ 的數值解。請將數值結果以單擺軌跡的方式呈現（不需要畫出彈簧與物體，只需畫出該物體質心位置的軌跡）。

Problem 2. 請下載課程網頁公告下第三項的 zip 檔，解壓縮後執行 solve_stokes.m 檔（請將第六行的 CHOICE 設成 6）。在沒問題的情況之下會得到下面兩個圖形：



此程式為（在非常簡化的設定之下）數值求解某形狀的機翼在向右吹的風洞中的速度場（圖左）與空氣壓力（圖右）。由於是數值解，該速度場與壓力只在一些特定的點（即下述的節點）上有被算出來。在本作業中，我們只關注速度場的部份。我們想知道若某一小紙片突然由左邊某處進入這個速度場，假設該紙片會隨空氣的速度流動（即隨風飄流）的情況下，其隨時間移動的軌跡為何。

圖形與輸出變數的解釋：

1. 此數值解是採取 FEM 方法求某偏微分方程的結果。在此所採用的 FEM 方法中，需將未知函數（即速度場與壓力）的定義域（稱為流域，在此為長方形區域）分割成很多三角形（如圖右所示），然後在各三角形的頂點和各邊中點（共六點，統稱為節點）取速度場的值。注意到相鄰三角形的共邊上是同樣的三點被取值，所以不會有定義域分割為 n 個三角形後就會有 $6n$ 個點要取出速度值。在輸出的變數中， n_elem 為三角形個數，而 n_u_node 為這些節點的個數。
2. 節點已進行編號，輸出變數中的 u_node_pos 的第 k 列即為編號 k 的節點的座標，而第 k 個節點的速度由 u_node_val 的第 k 列提供。
3. 三角形亦已進行編號， $elem_u_node_pos$ 的第 k 列為編號 k 的三角形上的六個節點的編號，其中第一至三行代表的是三角形的頂點（分別被稱為第一、第二、第三頂點）的編號，而四至六行分別代表第一第二頂點連線中點、第二第三頂點連線中點以及第一第三頂點連線中點的編號。你可以藉由這些特別的變數取得任意編號的三角形上的六個節點的座標與速度。

假設紙片隨時間移動軌跡為 $\mathbf{x}(t)$ ，且進入流域的位置是 \mathbf{x}_0 。若在點 \mathbf{y} 的速度為 $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ ，則 \mathbf{x} 滿足初始值問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (*)$$

完成下列的要求：

1. 我們目前只有 \mathbf{u} 在節點的值而非在整個流體域上的值，所以必須先定義一個能定義在整個流體域的速度函數。最直觀且合理的想法是若要求點 \mathbf{p} 在某一三角形中，則 $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ 的值由 \mathbf{p} 到該三角形的六個節點的速度依某個權重來做平均。請依這個想法寫下速度場的函數。
2. 在速度函數 \mathbf{u} 被確定之後，以 `ode45` 求初始值問題 (*) 的數值解，其中初始值 $\mathbf{x}_0 = (-1, 0.3)$ 。你可能必須進行實驗數次以決定選多長的時間區間 $[0, T]$ 以讓紙片能從左邊走到（盡量接近）右邊界。

此題大家所繳交的程式是助教在執行 `solve_stokes.m` 之後繼續再執行的，請不要於所交的程式中清除需要的變數。